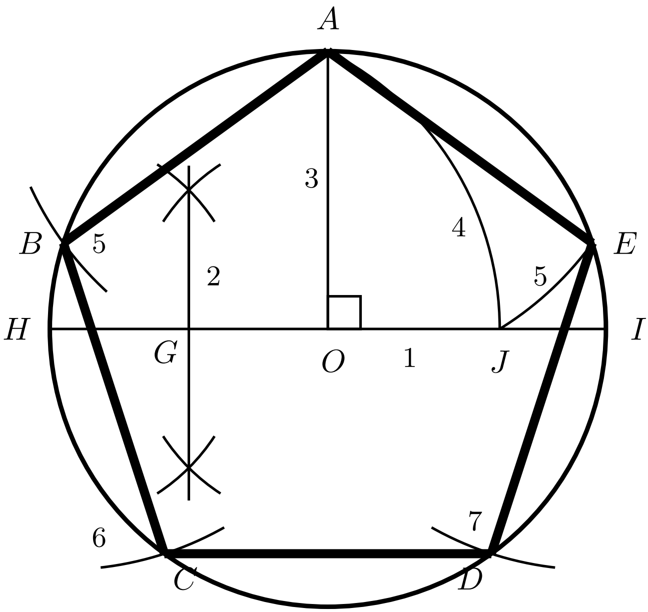
尺規作圖實例、題解和證明

孔德偉



ISBN 978-988-8159-32-1

目錄

前言

為配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深老師撰寫專文，並蒐集及整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《尺規作圖實例、題解和證明》是這個系列的其中一冊。作者孔德偉老師對尺規作圖及數學競賽有關的題目素有研究。本書除了介紹不同種類的尺規作圖問題及其解法外，更加入相關的證明，讓讀者深入理解使用尺規作圖方法當中的理據。這正配合《中學課程綱要 —數學科中一至中五 (1999)》第 22 頁中提及的「列舉理由支持有關繪畫步驟」。本書內容精闢，不僅可供教師參考，亦可作為學生讀物。本書只屬作者個人觀點，並不代表教育局的意見。

本系列能夠出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。數學教育組特別感謝香港大學允許本組引用三題香港大學入學試普通程度純數科試題，作為本書的材料。在此，謹向提供資料、撰寫文章的老師、學者，以及所有為本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

如有任何意見或建議，歡迎致函：
九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
（傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk ）

教育局課程發展處
數學教育組

序

這本書是寫給全香港的中學數學老師，以及對「尺規作圖」有興趣的學生閱讀的。

本人是一名中學數學教師，在觀看了 2001 年播出的一輯數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」後，內容中提出用圓規直尺作的三角形的難題，引發我對「尺規作圖」的興趣，並寫了數十篇文章，放在互聯網上。

「尺規作圖」在一般數學老師的心目中，是屬於「舊數」的產物；很多數學老師甚至從來未閱讀過在五十年代至七十年代香港中學會考數學試卷中有關「尺規作圖」的試題。例如：1958 年香港中學會考數學數學試卷二第一題 (a)：

> 已給 O 在 $\angle BAC$ 內，作一綫段 POQ（P 在 AB 上， Q 在 AC 上），使得 $PO = 2OQ$。

此題目距今已經有五十多年歷史了，近年來考評局也沒有擬定有關「尺規作圖」的題目了。現行實施的初中數學課程有涉及「尺規作圖」的課題。參考《中學課程綱要 —數學科中一至中五（1999）》第 22-23 頁：

全等及相似	• 探究如何以圓規及直尺繪畫角平分綫、垂直平分綫和特殊角，並列舉理由支持有關繪畫步驟 • 欣賞使用最少工具繪畫綫和角 • ** 討論只用圓規、直尺將角三等分的可能性

與綫及直綫圖形有關的角	• 欣賞過往以最少工具繪畫特殊正多邊形的嘗試 • 使用直尺和圓規繪畫一些特殊的正多邊形 • ** 討論前人曾嘗試繪畫的一些特殊正多邊形（例如正 17 邊形）

對於老師而言，他們不但不熟悉這門知識，而且覺得很難教授。學生們幾乎從未接觸過「尺規作圖」，簡單如使用三角尺及量角器的作圖題目也會錯漏百出。反正公開考試數學科沒有這類題目，很多數學老師便索性不教這課題了。

其實利用「尺規作圖」可欣賞歐幾里得幾何的結構，例如定義、公理及公設等及以演繹推理來處理幾何問題的方法，也可從中學習古希臘幾何三大問題：[1]

（方圓問題）求作一個正方形，使其面積和半徑為 1 單位的圓面積相等；
（倍立方問題）求作一個正立方體，使其體積為邊長為 1 單位的正立方體的兩倍；
（三等分角問題）三等分任意已知角。

幾千年來，很多數學家也曾研究「尺規作圖」，即作圖只使用沒有刻度的直尺（straightedge）和圓規（compasses）。

自從 2009 年開始，由教育局及香港教育學院聯合舉辦的香港數學競賽開始引入「幾何作圖」環節，希望藉此推動多些學生和老師對這方面的研究和興趣。

在閱讀這本書前，讀者必須具備有一般中學課程數學科的知識：例如畢氏定理、在平面空間的點和綫的關係、全等和相似、中點定理、截綫定

[1]節錄自 EpisteMath 台灣大學數學系康明昌 http://episte.math.ntu.edu.tw/articles

理、三角形的五心、圓形的性質、三角比、正弦公式和餘弦公式......等等。

這本書共分成六個章節：

從鋪排上，大致上是由淺入深的和分門別類的。每一段文章開首是題目，然後是分析和題解，最後是證明部分；末段可能還加上思考題。希望各位讀者細心欣賞和閱讀。

以本人有限的知識和時間，在本書中提出的想法和證明，錯漏在所難免；如蒙各位高人指點，不論是提出另類解法，抑或是指出原文錯誤，歡迎賜教。本人將萬分感激。

一些反思

前人有云：「幾何無捷徑。」我想這句說話甚至可推廣至：「數學之路無捷徑。」

為了要成功作圖，往往花上數星期的時間。世上數學難題何其多，如果我不是在鑽研的過程中尋找到樂趣的話，早就放棄好了。正因為有興趣研究，我才將一丁點兒研究成果，與讀者分享；希望可以感染到讀者，也會專心研究數學難題。

現今數學比賽，多不勝數。甚至幼稚園的學生也參加比賽，令老師和學生都喘不過氣來。我隨便取一份試卷試做，也要花很長時間才能完成。試問一般學生，又怎能做得到呢？

數學比賽的形式，往往只求答案，而不用列式；少數比賽包括作圖部分，卻要求學生短時間之內完成，不須證明。這種不求甚解，追求快而準的比賽方法，的確無法誘發莘莘學子們研究數學的興趣。

鳴謝

這本書得以順利付梓，有幸教育局總課程發展主任（數學）吳少階 先生及前教育局總課程發展主任（數學）李栢良 先生邀請，並由李健深 先生排版及校對，以及已退休的梁志錄 老師，他不斷給予我的支持和鼓勵，提供部分問題和解答及校對。

已退休的荃灣官立中學姚世明 校長，批准我於 2010 年到香港教育學院進修。好使我能利用這段時間編寫這本書。另外，香港教育學院數學高級講師鄭振初 先生同意將這本書當作進修課程課業。本人十分感謝他們，沒有他們的批准和同意，我實在沒法抽空寫書。

梁廣成 先生提供大量「尺規作圖」的問題和「根軸」一文的獨特見解；還有吳銳堅 博士於「幾何作圖」講座筆記提供的參考書和不能三分角的知識，令我如沐春風。最後，教育局數學教育組各位課程發展主任，他們提供意見和積極的配合，本人實在無限感激。

二〇一四年二月

孔德偉

第 1 章　相交弦定理及其逆定理

1.1　定理一及其逆定理

定理一　如圖 1，兩弦綫 AB 和 CD 相交於圓內一點 K。

若 $AK=a$， $BK=b$， $CK=c$， $DK=d$，則 $ab=cd$。

證明：

$\angle KAC=\angle KDB$	（同弓形上的圓周角)
$\angle KCA=\angle KBD$	（同弓形上的圓周角）
$\angle AKC=\angle DKB$	（對頂角）
$\therefore \triangle AKC\sim\triangle DKB$	（等角）
$\therefore \dfrac{a}{d}=\dfrac{c}{b}$	（相似三角形的對應邊）
$ab=cd$	

證明完畢。

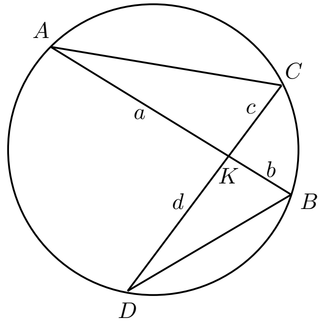


圖 1

逆定理：如圖 2，若兩綫段 AB 和 CD 相交於一點 K； $AK = a$，$BK = b$， $CK = c$， $DK = d$；且 $ab = cd$，則 A、 C、 B、 D 四點共圓。

證明：

$\angle AKC = \angle BKD$	（對頂角）
$\because ab = cd$	（已知）
$\therefore \dfrac{a}{d} = \dfrac{c}{b}$	
$\therefore \triangle AKC \sim \triangle DKB$	（兩邊成比例，一夾角相等）
$\therefore \angle KCA = \angle KBD$	（相似三角形的對應角）
A、 C、 B、 D 四點共圓。	（同弓形上的圓周角的逆定理）

證明完畢。

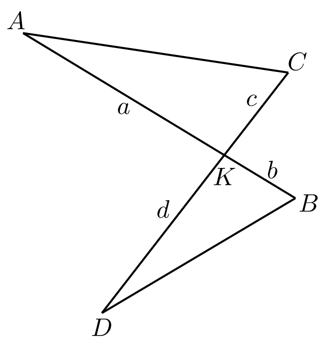


圖 2

1.2 定理二及其逆定理

定理二　如圖 3，兩非平行的弦綫 AB 和 DC 的延長綫相交於圓外一點 K。若 $AK = a$， $BK = b$， $CK = c$， $DK = d$，則 $ab = cd$。

證明：
$\angle KAD = \angle KCB$　（圓內接四邊形外角）
$\angle KDA = \angle KBC$　（圓內接四邊形外角）
$\angle AKD = \angle CKB$　（公共角）
$\therefore \triangle AKD \sim \triangle CKB$　（等角）
$\therefore \dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{b}$　（相似三角形的對應邊）
$ab = cd$

證明完畢。

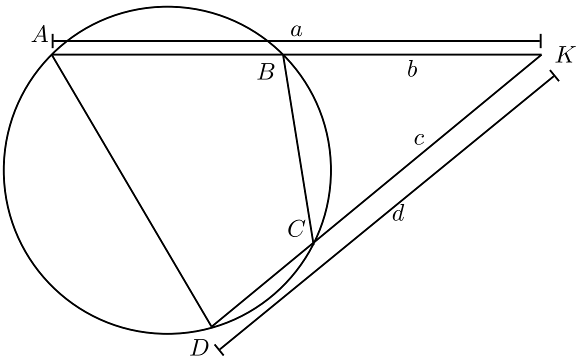


圖 3

逆定理： 如圖 4，若兩綫段 AB 和 DC 的延長綫相交於一點 K； $AK = a$， $BK = b$， $CK = c$， $DK = d$；且 $ab = cd$，則 A、 B、 C、 D 四點共圓。

證明： $\angle AKD = \angle CKB$ （公共角）

$\because ab = cd$ （已知）

$\therefore \dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{b}$

$\therefore \triangle AKD \sim \triangle CKB$ （兩邊成比例，一夾角相等）

$\therefore \angle KAD = \angle KCB$ （相似三角形的對應角）

A、 B、 C、 D 四點共圓。 （外角 = 內對角）

證明完畢。

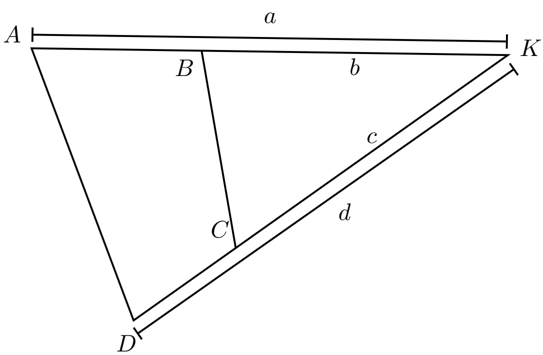


圖 4

1.3　定理三及其逆定理

定理三　如圖 5，弦綫 AB 的延長綫和圓上 C 點的切綫相交於一點 K。若 $AK = a$， $BK = b$， $CK = c$，則 $ab = c^2$。

證明：
$\angle BCK = \angle CAK$ （交錯弓形的圓周角）
$\angle BKC = \angle CKA$ （公共角）
$\angle CBK = \angle ACK$ （三角形內角和）
$\therefore \triangle CKB \sim \triangle AKC$ （等角）
$\therefore \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{b}$ （相似三角形的對應邊）
$ab = c^2$
證明完畢。

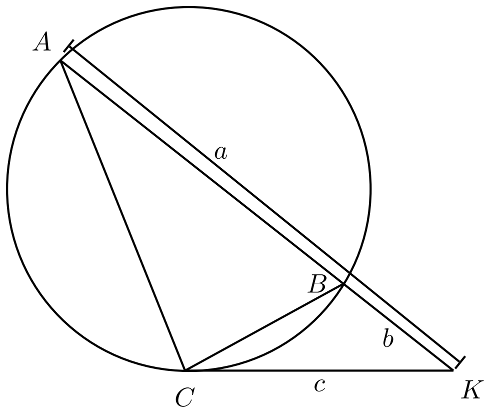


圖 5

逆定理：如圖 6，已給三角形 ACK， B 在 AK 上； $AK=a$， $BK=b$， $CK=c$；且 $ab=c^2$，則 CK 切圓 ABC 於 C。

證明：$\angle BKC=\angle CKA$　（公共角）

$\because ab=c^2$　（已知）

$\therefore \dfrac{a}{c}=\dfrac{c}{b}$

$\therefore \triangle AKC\sim\triangle CKB$　（兩邊成比例，一夾角相等）

$\angle CAK=\angle BCK$　（相似三角形的對應角）

CK 切圓 ABC 於 C。　（交錯弓形的圓周角的逆定理）

證明完畢。

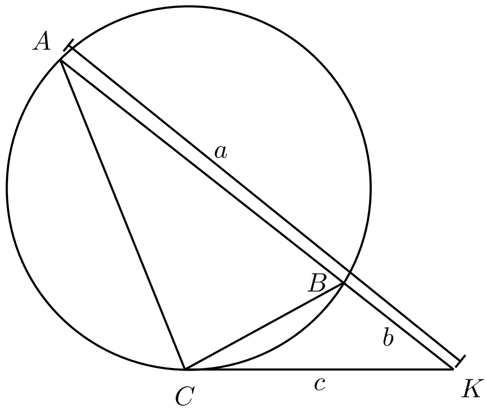


圖 6

第 2 章　作圖基本技巧

2.1　作一已知三邊長度的三角形

已給 1 單位長度，作一三角形，三邊長度分別為 2 單位、3 單位及 4 單位。

作圖方法如下（圖 7）：

1. 作一邊長為 4 單位的綫段 AB。
2. 以 A 為圓心，半徑 2 單位作一弧；以 B 為圓心，半徑 3 單位作一弧；兩弧相交於 C。
3. 連接 AC、 BC。 $\triangle ABC$ 便滿足條件了。(S.S.S.)

作圖完畢。

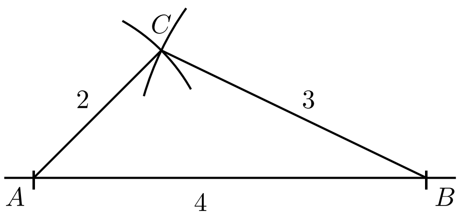


圖 7

2.2　複製已知角

已給一隻角 $\angle ABC$，複製該角為 $\angle PQR$。

作圖方法如下（圖 8 及圖 9）：

1. 以 B 為圓心，某一固定半徑作一弧，交 AB 於 D，及 BC 於 E。
2. 作一綫段 QP。以 Q 為圓心，相同半徑作一弧，交 PQ 於 S。
3. 以 D 為圓心，半徑為 DE 作一弧；以 S 為圓心，半徑為 DE 作一弧，與步驟 2 的弧交於 T。
4. 連接並延長 QT 至 R。

作圖完畢。

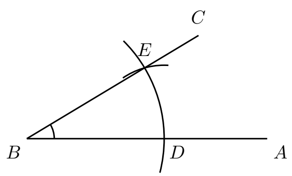


圖 8

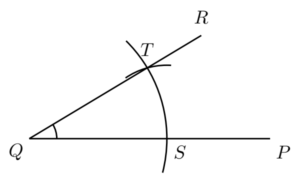


圖 9

證明如下：

$\triangle BDE \cong \triangle QST$　（S.S.S.）
$\therefore \angle DBE = \angle SQT$　（全等三角形的對應角）
即 $\angle ABC = \angle PQR$

證明完畢。

2.3　過已知點作平行綫

如圖 10，已給一點 C，且不在一直綫 AB 上，過 C 作一綫平行於 AB。

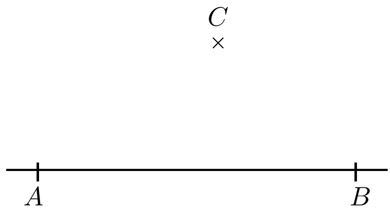


圖 10

作圖方法如下（圖 11）：
連接 AC，複製 $\angle BAC$ 至 $\angle ACD$　(B 和 D 在 AC 的不同一方)。

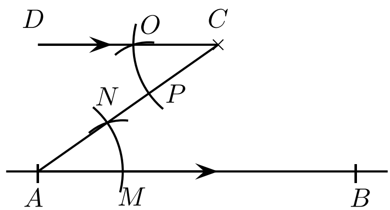


圖 11

作圖完畢。

證明如下：

$\angle BAC = \angle ACD$	（由作圖所得）
$\therefore AB//DC$	（錯角相等）

證明完畢。

2.4 作 60° 及等邊三角形

已給一綫段 AB，作 60° 及等邊三角形。

作圖方法如下（圖 12）：

1. 以 A 為圓心， AB 為半徑作一弧；以 B 為圓心， BA 為半徑作一弧；兩弧相交於 C。
2. 連接 AC 及 BC。

作圖完畢。

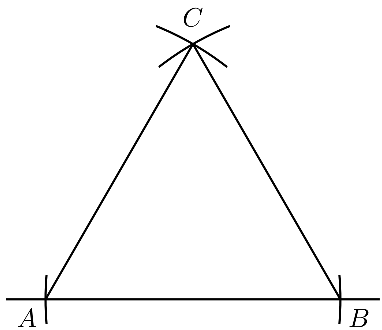


圖 12

證明如下：

$AC = AB = BC$ （由作圖所得）
$\therefore \triangle ABC$ 為等邊三角形。
$\therefore \angle BAC = 60^\circ$ （等邊三角形性質）

證明完畢。

2.5 將一綫段等分成五等份

已給一綫段 AB，將 AB 分成五等份。

作圖方法如下（圖 13）：

1. 在任意方向，作一綫段 AM（M, A, B 不共綫）。
2. 以 A 為圓心，任意固定半徑作一弧；交 AM 於 P；以 P 為圓心，以此半徑作一弧；交 AM 於 Q；如此類推，得到五點 P、 Q、 R、 S、 T 在 AM 上且等距。
3. 連接 TB，過 P、 Q、 R、 S 作綫段平行於 TB，分別交 AB 於 C、 D、 E、 F。

作圖完畢。

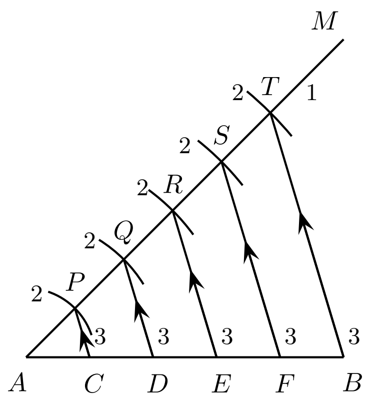


圖 13

證明：

C、 D、 E、 F 將 AB 分成五等份 （截綫定理）

證明完畢。

利用這方法，可將 AB 分成任意等份。

2.6　作垂直平分綫

已給一綫段 AB，作垂直平分綫。

作圖方法如下（圖 14）：

1. 以 A 為圓心， AB 為半徑作一弧；以 B 為圓心，以 BA 為半徑作一弧；兩弧相交於 P、 Q。
2. 連接 PQ，交 AB 於 M。

作圖完畢。

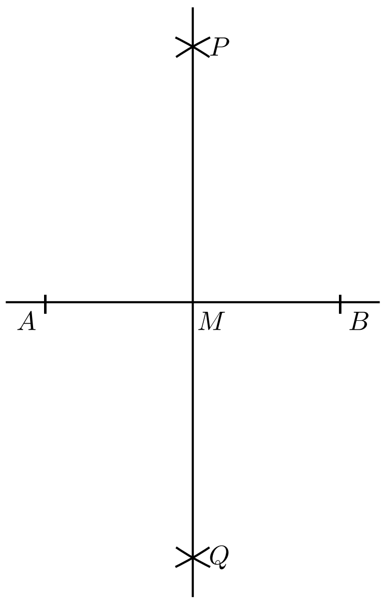


圖 14

證明如下：

連接 AP、 AQ、 BP 及 BQ。

$PQ = PQ$	（公共邊）
$AP = BP$	（半徑）
$AQ = BQ$	（半徑）
$\therefore \triangle APQ \cong \triangle BPQ$	（S.S.S.）
$\therefore \angle APQ = \angle BPQ$	（全等三角形的對應角）
$PM = PM$	（公共邊）
$\therefore \triangle AMP \cong \triangle BMP$	（S.A.S.）
$\angle AMP = \angle BMP$	（全等三角形的對應角）
$\angle AMP + \angle BMP = 180°$	（直綫上的鄰角）
$\therefore \angle AMP = \angle BMP = 90°$	
$AM = MB$	（全等三角形的對應邊）

$\therefore PQ$ 為 AB 的垂直平分綫。

證明完畢。

2.7 作角平分綫

已給一隻角 $\angle BAC$，作角平分綫。

作圖方法如下（圖 15）：

1. 以 A 為圓心，某一固定半徑作一弧，交 AB 於 R，及 AC 於 Q。
2. 以 Q 為圓心，某一固定半徑作一弧；以 R 為圓心，相等半徑作一弧；兩弧相交於 P。
3. 連接 AP。 AP 為 $\angle BAC$ 的角平分綫。

作圖完畢。

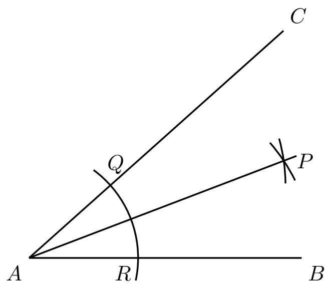


圖 15

證明如下：

連接 PQ 及 PR。

$AP = AP$	（公共邊）
$AQ = AR$	（半徑）
$PQ = PR$	（半徑）
$\therefore \triangle APQ \cong \triangle APR$	（S.S.S.）
$\therefore \angle PAQ = \angle PAR$	（全等三角形的對應角）

AP 便是 $\angle BAC$ 的角平分綫。

證明完畢。

2.8　作經過綫段上已知點的垂直綫

如圖 16，已給一綫段 AB， P 在 AB 上，過 P 作一綫段垂直於 AB。

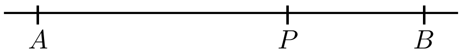


圖 16

作圖方法如下（圖 17）：

1. 以 P 為圓心，某一固定半徑作一弧，交 AB 於 Q 及 R。
2. 以 Q 為圓心， QR 為半徑作一弧；以 R 為圓心， QR 為半徑作一弧；兩弧相交於 S。連接 PS， PS 為一垂直 AB 的綫段。

作圖完畢。

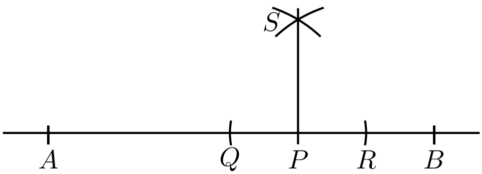


圖 17

證明如下：

連接 QS 及 RS。	
$PS = PS$	（公共邊）
$PQ = PR$	（半徑）
$QS = RS$	（半徑）
$\therefore \triangle PQS \cong \triangle PRS$	（S.S.S.）
$\angle QPS = \angle RPS$	（全等三角形的對應角）
$\angle QPS + \angle RPS = 180^\circ$	（直綫上的鄰角）
$\therefore \angle QPS = \angle RPS = 90^\circ$	

證明完畢。

2.9 作由外點至已知綫段的垂直綫

如圖 18，已給一綫段 AB， P 不在 AB 上，過 P 作一綫段垂直於 AB。

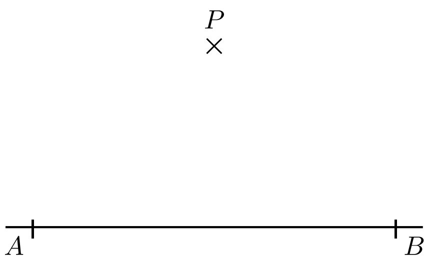


圖 18

作圖方法如下（圖 19）：

1. 以 P 為圓心，足夠大的半徑作一弧，交 AB 於 Q 及 R。

2. 以 Q 為圓心，相等半徑作一弧；以 R 為圓心，相等半徑作一弧；兩弧相交於 S。

3. 連接 PS， PS 為一綫段垂直於 AB。

作圖完畢。

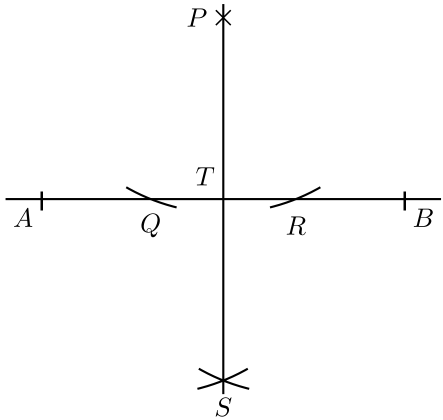


圖 19

證明如下：

連接 PQ、 PR、 SQ 及 SR，交 AB 於 T。

$PS = PS$	（公共邊）
$PQ = PR$	（半徑）
$QS = RS$	（半徑）
$\therefore \triangle PQS \cong \triangle PRS$	（S.S.S.）
$\angle QPS = \angle RPS$	（全等三角形的對應角）
$PT = PT$	（公共邊）
$\therefore \triangle PQT \cong \triangle PRT$	（S.A.S.）
$\angle PTQ = \angle PTR$	（全等三角形的對應角）
$\angle PTQ + \angle PTR = 180°$	（直綫上的鄰角）
$\therefore \angle PTQ = \angle PTR = 90°$	

證明完畢。

2.10 作經過綫段端點的垂直綫

如圖 20，已給一綫段 AB，過 B 作一綫段垂直於 AB。

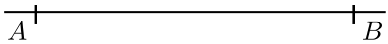


圖 20

作圖方法如下（圖 21）：

1. 取任意點 C（C 在 AB 之間的上方）為圓心，CB 為半徑作一圓，交 AB 於 P。
2. 連接 PC，其延長綫交圓於 Q；連接 BQ。BQ 為所求的垂直綫。

作圖完畢。

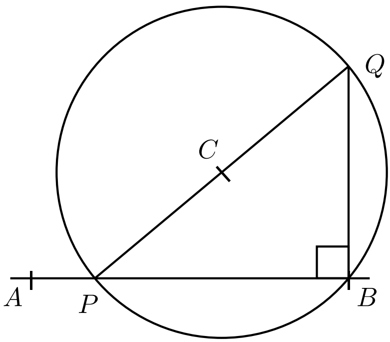


圖 21

證明如下：

PCQ 為圓之直徑	（由作圖所得）
$\therefore \angle PBQ = 90^\circ$	（半圓上的圓周角）

證明完畢。

2.11　作已知腰長的直角等腰三角形

已給一綫段 AB，作直角等腰三角形 ABC；其中 $AB = BC$。

作圖方法如下（圖 22）：

1. 作經過 B 而垂直 AB 的綫段 BR。(方法請參考 **2.10** 作經過綫段端點的垂直綫)。
2. 以 B 為圓心， BA 為半徑作一弧，交 BR 或 BR 的延長綫於 C。
3. 連接 AC， $\triangle ABC$ 便是該三角形了。

作圖完畢。

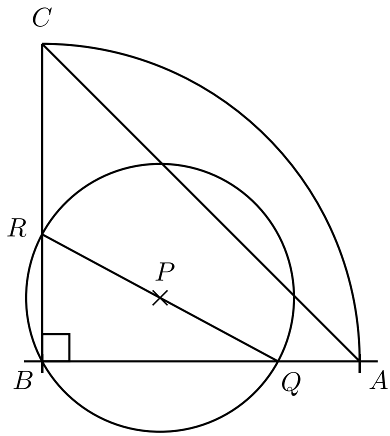


圖 22

證明如下：

QPR 為圓之直徑	（由作圖所得）
$\angle RBQ = 90°$	（半圓上的圓周角）
$AB = BC$	（半徑）

所以 $\triangle ABC$ 便是直角等腰三角形。

證明完畢。

2.12　作 A.S.A. 條件的三角形

已給 1 單位長度，作 A.S.A. 條件的三角形 ABC，其中 $AB = 2$ 單位，$\angle BAC = 60°$ 及 $\angle ABC = 67.5°$。

作圖方法如下（圖 23）：

1. 作 $AB = 2$ 單位，作 $BH \perp AB$（方法請參考 **2.10** 作經過綫段端點的垂直綫）。
2. 作 $\angle BAD = 60°$（方法請參考 **2.4** 作 60° 及等邊三角形）。
3. 作 $\angle ABH$ 的角平分綫 GB（方法請參考 **2.7** 作角平分綫），$\angle GBH = 45°$。
4. 作 $\angle GBH$ 的角平分綫 EB， $\angle EBH = 22.5°$。
   $\therefore \angle ABE = 90° - 22.5° = 67.5°$。
5. AD 和 BE 的延長綫相交於 C。

$\triangle ABC$ 便是該三角形了，作圖完畢。

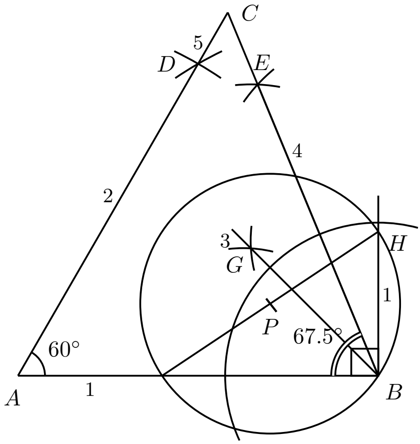


圖 23

2.13 作過圓周上已知點的切綫

如圖 24，已給一圓，圓心為 O， P 在圓周上，過 P 作切綫。

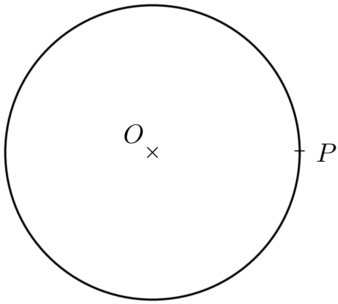


圖 24

作圖方法如下（圖 25）：

1. 連接 OP。

2. 過 P 作綫段 ST 垂直於 OP，（方法請參考 **2.10** 作經過綫段端點的垂直綫)， ST 為過 P 的切綫。

作圖完畢。

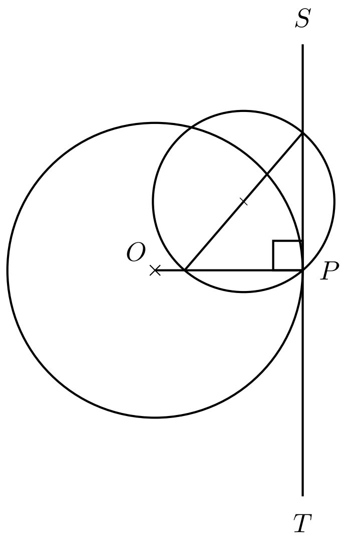


圖 25

證明如下：

$\angle OPS = 90°$	（由作圖所得）
ST 切該圓於 P。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

2.14　作圓的圓心

已給一圓，以尺規找出圓心。

作圖方法如下（圖 26）：

1. 在圓上找出兩條不平行的弦綫 AB 和 CD。
2. 作 AB 和 CD 的垂直平分綫，且相交於 O。

O 為該圓的圓心。作圖完畢。

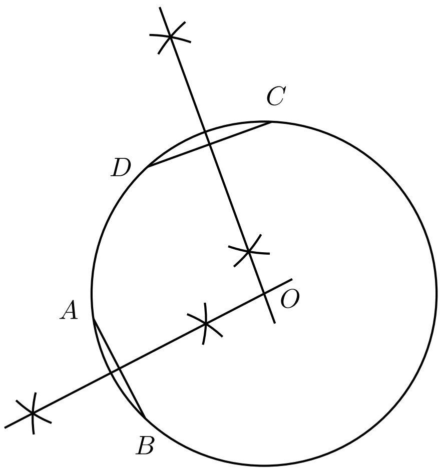


圖 26

2.15 從已知長度 a 及 b 中作 $\sqrt{ab}$

已給兩綫段長度分別為 a， b。以尺規作 $\sqrt{ab}$。

作圖方法如下（圖 27）：

1. 作一綫段 ABC，使得 $AB = a$， $BC = b$。
2. 利用 AC 的垂直平分綫，找出 AC 的中點 O， $OA = OC$。
3. 以 O 為圓心， $OA = OC$ 為半徑作一圓。
4. 過 B 作一綫段垂直於 AC，且交圓於 P、 Q。 PB 的長度為 $\sqrt{ab}$。

作圖完畢。

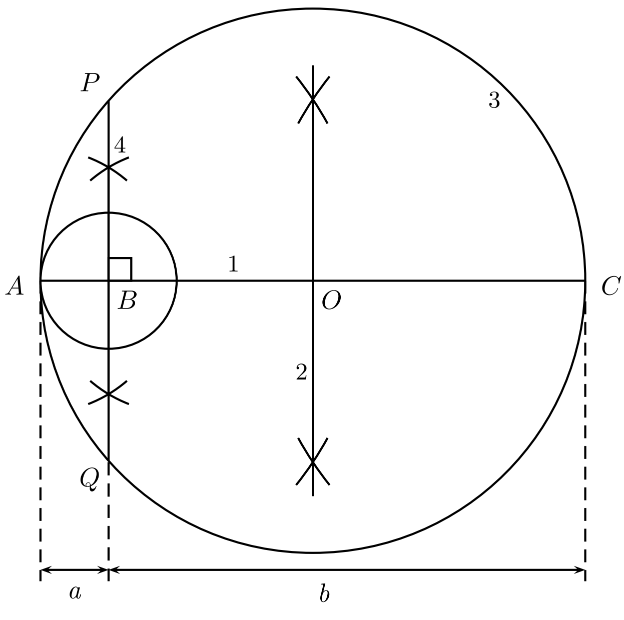


圖 27

證明如下：

$PB = BQ$ （圓心至弦的垂綫平分弦）

$AB \times BC = PB \times BQ$ （相交弦定理）

$\therefore ab = PB^2$

$PB = \sqrt{ab}$

證明完畢。

第 3 章　簡單作圖

3.1　在已知條件下作一綫段

如圖 28，已給 O 在 $\angle BAC$ 內，作一綫段 POQ（P 在 AB 上， Q 在 AC 上），使得 $PO = 2OQ$。[1]

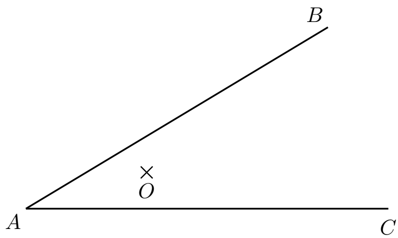


圖 28

作圖方法如下：

1. 連接 AO，並延長至 R，使得 $2AO = OR$（圖 29）。

[1]原題目為香港中學會考 1958 Mathematics Paper 2 Q1(a)
O is a point in angle BAC. Through O draw a straight line POQ cutting the angle arms AB and AC at P and Q respectively, so that $PO = 2OQ$.

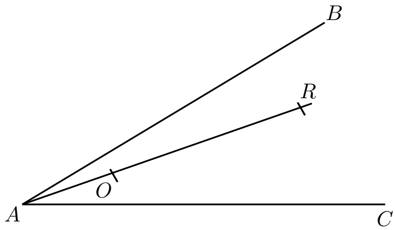


圖 29

2. 過 R 作一綫段平行於 AC，並且交 AB 於 P（圖 30）。

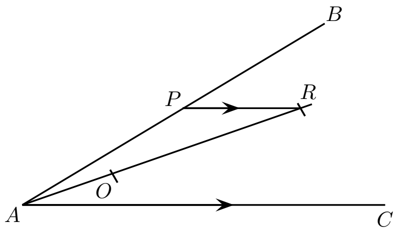


圖 30

3. 連接 PO，其延長綫交 AC 於 Q（圖 31）。

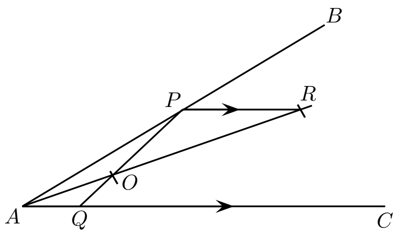


圖 31

作圖完畢。

證明如下：

由於 $PR//AQ$，易證 $\triangle POR \sim \triangle QOA$　（等角）
$\therefore PO = 2OQ$　（相似三角形的對應邊）

證明完畢。

3.2 已給 1 單位長度，作 $\sqrt{7}$

圖 32 所示為長度 1 單位的綫段 AB。試作一長度為 $\sqrt{7}$ 單位的綫段。[2]

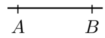


圖 32

作圖方法如下：

方法一（圖 33）：

1. 依比例作一綫段 AC=4 單位。
2. 利用 AC 的垂直平分綫，找出 AC 的中點 O， $AO = OC$。
3. 以 O 為圓心， $OA = OC$ 為半徑作一半圓。
4. 以 C 為圓心，半徑 = 3 單位作一弧，交半圓於 P。
5. 連接 AP，因此， $AP = \sqrt{7}$。

作圖完畢。

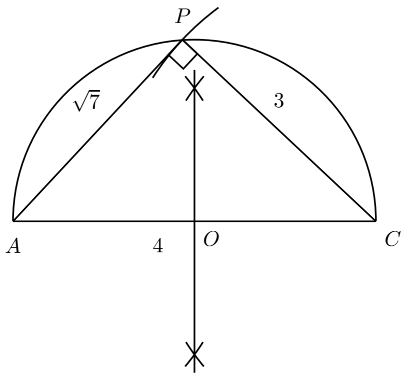


圖 33

[2]原題目為香港數學競賽 2009/2010 初賽（幾何作圖）第 1 題

證明如下：

$\angle APC = 90^\circ$ （半圓上的圓周角）
$AP = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ （畢氏定理）

證明完畢。

方法二（圖 34）：

1. 作一綫段 ABC，使得 AB=1 單位， BC=7 單位。
2. 利用 AC 的垂直平分綫，找出 AC 的中點 O， $AO = OC = 4$ 單位。
3. 以 O 為圓心， $OA = OC = 4$ 單位為半徑作一圓。
4. 過 B 作一綫段垂直於 AC，且交圓於 P、 Q。

PB 的長度為 $\sqrt{7}$ 單位，作圖完畢。

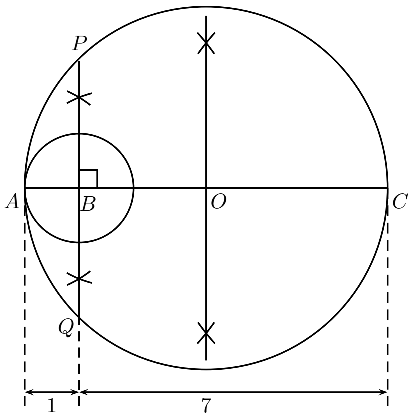


圖 34

證明如下：

$PB = BQ$ （圓心至弦的垂綫平分弦）

$AB \times BC = PB \times BQ$ （相交弦定理）

$1 \times 7 = PB^2$

$PB = \sqrt{7}$

證明完畢。

3.3　化長方形為長方形

如圖 35，已給一長方形，邊長為 $a \times b$，作一面積相等的長方形，其中一邊為 x。

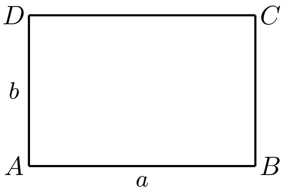


圖 35

作圖方法如下：

假設 $x < a$（圖 36）。

1. 作 E 點使得 $AE = x$。
2. 過 E 作 EK 垂直於 AB，交 CD 於 K。
3. 連接 AK，其延長綫交 BC 的延長綫於 M。
4. 過 M 作一綫平行於 AB，交 AD 的延長綫於 G。
5. 延長 EK，交 MG 於 F。

$AEFG$ 便是該長方形了。作圖完畢。

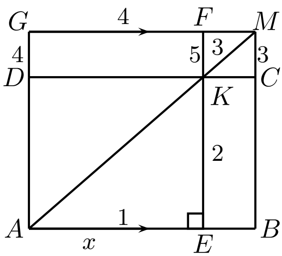


圖 36

證明如下（圖 37）：

$\triangle AMG \cong \triangle MAB$　(S.S.S.)
$\triangle AKD \cong \triangle KAE$　(S.S.S.)
$\triangle KMF \cong \triangle MKC$　(S.S.S.)

$\therefore$ 長方形 $GFKD$ 的面積 $=$ 長方形 $BCKE$ 的面積
$\therefore$ 長方形 $ABCD$ 的面積 $=$ 長方形 $AEFG$ 的面積

證明完畢。

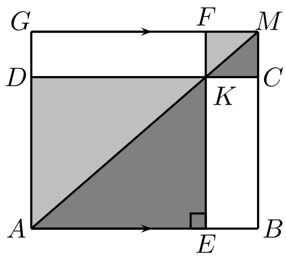


圖 37

假設 $x \geq a$（圖 38）。

1. 延長 AB，作 E 點使得 $AE = x$。
2. 過 E 作一綫垂直於 AB，交 DC 的延長綫於 K。
3. 連接 AK，交 BC 於 M。
4. 過 M 作 FMG 平行於 BA，交 KE 於 F、及交 AD 於 G。

$AEFG$ 便是該長方形了，作圖完畢。

證明從略。

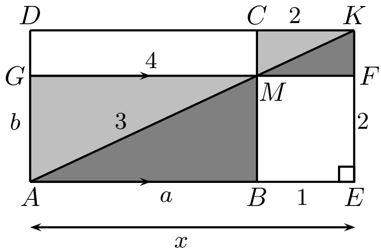


圖 38

註：此方法不能化長方形為正方形。讀者可參考 2.15 從已知長度 a 及 b 中作 $\sqrt{ab}$。

3.4 作梯形

作梯形 $PQRS$，其中 PQ 平行於 SR， $PQ = 9$ 單位， $QR = 3$ 單位，$RS = 4$ 單位及 $SP = 4.5$ 單位。

作圖方法如下（圖 39）：

1. 作三角形 PST，其中 $PT = 5$ 單位、 $ST = 3$ 單位及 $PS = 4.5$ 單位。
2. 將 PT 延長 4 單位至 Q。連接 QS。
3. 作 QS 的垂直平分綫， O 為 QS 的中點。
4. 以 O 為圓心， OT 為半徑作一圓。
5. 連接 TO 並延長交圓於 R。
6. 連接 QR、 RS。

作圖完畢。

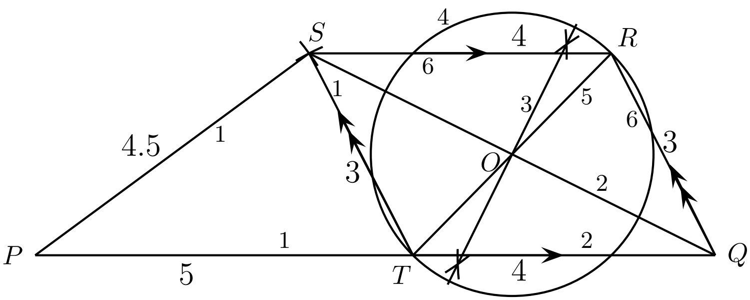


圖 39

證明如下：

$OR = OT$	（半徑）
$OQ = OS$	（由作圖所得）
$\therefore QRST$ 為一個平行四邊形	（對角綫互相平分）
$RS = QT = 4$ 單位	（平行四邊形的對邊）
$RQ = ST = 3$ 單位	（平行四邊形的對邊）

證明完畢。

3.5 利用尺規作圖將一隻角平分，該角之頂點在紙外

如圖 40， PQ 和 RS 為兩條非平行綫段，其延長綫相交於紙外的點 I，今要平分 $\angle PIR$。

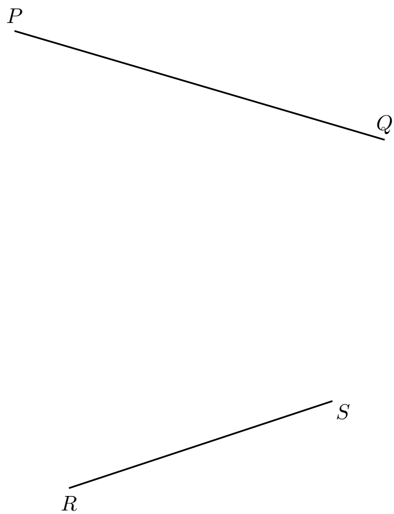


圖 40

作圖方法如下：

方法一（圖 41）：

1. 連接 QS。
2. 分別作 $\angle PQS$ 和 $\angle RSQ$ 的角平分綫，兩條角平分綫交於 E。
   QE 是 $\angle IQS$ 的外角平分綫。 SE 是 $\angle ISQ$ 的外角平分綫。
3. 過 E 分別作至 PQ、 RS 及 QS 之垂足 G、 H 和 J。

4. 作 $\angle GEH$ 的角平分綫 EF。

EF 便是所需角平分綫，作圖完畢。

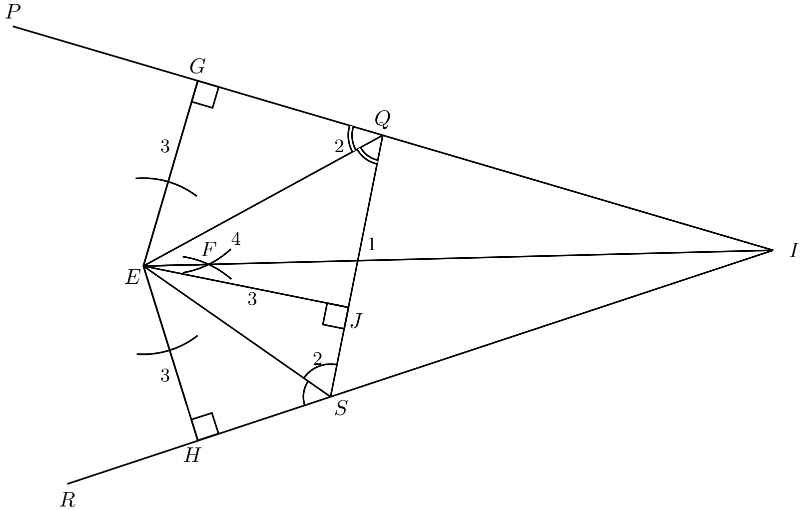


圖 41

證明如下：

$\triangle EQG \cong \triangle EQJ$	（A.A.S.）
$\triangle EHS \cong \triangle EJS$	（A.A.S.）
$EG = EJ = EH$	（全等三角形的對應邊）
$\triangle IEG \cong \triangle IEH$	（R.H.S.）
$\angle EIG = \angle EIH$	（全等三角形的對應角）

$\therefore IE$ 平分 $\angle PIR$。

IE 亦平分 $\angle GEH$。

由於 EF 平分 $\angle GEH$。

$\therefore EF$ 是 $\angle PIR$ 的角平分綫。

證明完畢。

方法二：

一如方法一中步驟 1 及步驟 2，找出 E 點。

3. 在 PQ 之間找出任意一點 X，在 RS 之間找出任意一點 Y。作 $\angle PXY$ 的角平分綫及作 $\angle RXY$ 的角平分綫。兩條角平分綫相交於 F。
4. 連接 EF，則 EF 便是所需角平分綫。

證明從略。

3.6 平分直角三角形的面積

$\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle C = 90°$ 及 $AC < BC$。利用尺規作圖找出 AB 上的一點 D，使得經過 D 而又垂直 AB 之綫段將 $\triangle ABC$ 的面積分為兩等份。[3]

首先，我們計算 BE 和 AB 的關係（其中 E 為所需垂直綫與 BC 的交點，圖 42）：

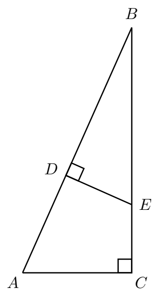


圖 42

$$
\begin{aligned}
&\angle ACB = 90° = \angle BDE && \text{（已知）}\\
&\angle ABC = \angle EBD && \text{（公共角）}\\
&\angle CAB = \angle DEB && \text{（三角形內角和）}\\
&\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD && \text{（等角）}\\
&\frac{\triangle BDE\text{的面積}}{\triangle ABC\text{的面積}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{BE}{AB}\right)^2 \\
&\frac{BE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&BE = \frac{AB}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

[3]原題目為 Q2(b), Ordinary Level Pure Mathematics Paper II, HKU Matriculation Examination (1957)
ABC is a triangle with a right angle at C and $AC < BC$. Obtain a construction for finding the point D on AB such that the perpendicular to AB at D divides the triangle into two parts of equal area.

作圖方法如下（圖 43）：

1. 利用垂直平分綫，找出 AB 之中點 O。
2. 以 O 為圓心， $OA = OB$ 為半徑，作一圓，與剛才的垂直平分綫相交於 F。
3. 以 B 為圓心， BF 為半徑，作一圓弧，交 BC 於 E。
4. 自 E 作一綫段垂直於 AB， D 為垂足。

作圖完畢。

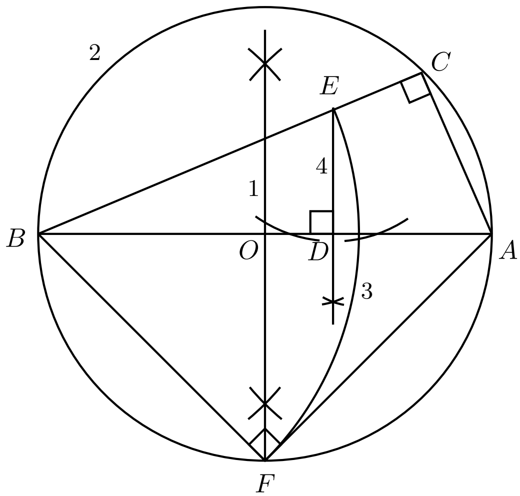


圖 43

證明如下：

$\angle AFB = 90^\circ$　　（半圓上的圓周角）
$\triangle AFB$ 為一個直角等腰三角形
$\because BF = FA$　　（由作圖所得）
$BF^2 + FA^2 = AB^2$　　（畢氏定理）
$\therefore BF = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$
$BE = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$　　（步驟 3 圓弧的半徑）

$\therefore DE$ 將 $\triangle ABC$ 的面積分成兩等份。
證明完畢。

3.7 作中綫

已給三條長度為 b、 c 及 m 的綫段，若 x 滿足 $b^2+c^2=2m^2+2x^2$（其中 $b+c>2m$），作長度為 x 的綫段。[4]

作圖方法如下（圖 44）：

作三角形 ABC，其中邊長 $BC=2m$， $AC=b$， $AB=c$。
利用垂直平分綫，找出 BC 之中點 D， $BD=m=DC$。

設 $AD=x$， $\angle ADC=\theta$， $\angle ADB=180°-\theta$ （直綫上的鄰角）

$$\cos\theta=\frac{m^2+x^2-b^2}{2mx} \quad \cdots\cdots \quad (1) \qquad (\triangle ACD\text{ 餘弦定理})$$

$$\cos(180°-\theta)=\frac{m^2+x^2-c^2}{2mx} \quad \cdots\cdots \quad (2) \qquad (\triangle ABD\text{ 餘弦定理})$$

$$\because \ \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$

$$(1)+(2):\ 0=\frac{m^2+x^2-b^2}{2mx}+\frac{m^2+x^2-c^2}{2mx}$$

$$b^2+c^2=2m^2+2x^2$$

$\therefore AD=x$ 為題目要求的綫段，亦即中綫。

作圖完畢。

[4] 原題目為 Q2(c), Ordinary Level Pure Mathematics Paper II, HKU Matriculation Examination (June 1954)
Using the result in (a), derive a construction of the length x from the equation $b^2+c^2=2m^2+2x^2$ when the lengths b, c and m are given.

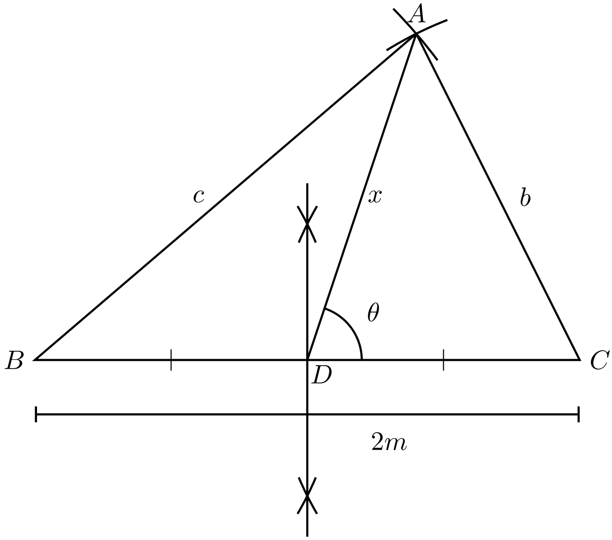


圖 44

3.8 利用尺規作圖解二次方程式

已給出二次方程 $x^2 + ax + b = 0$，利用尺規作圖找出其根。

作圖方法如下（圖 45）：

1. 在直角坐標系統點出 $P(0, 1)$ 及 $Q(-a, b)$。
2. 利用垂直平分綫，找出 PQ 之中點 C。
3. 以 C 為圓心， CP 為半徑作一圓。
4. 若該圓交 x 軸於 $A(\alpha,0)$、 $B(\beta,0)$，則 A、 B 的 x 坐標 α、 β 便是該二次方程的解。

作圖完畢。

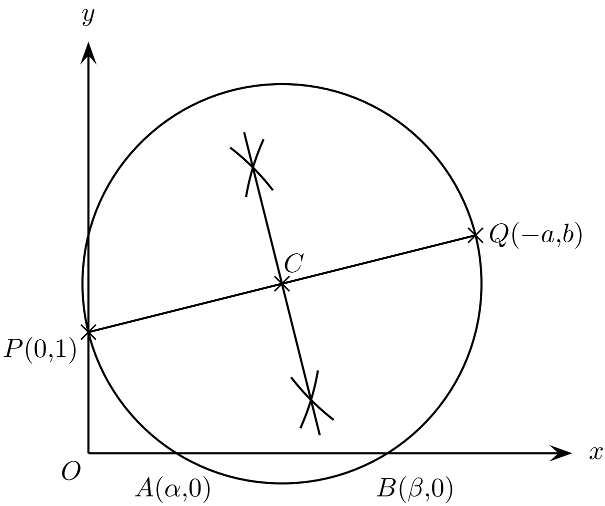


圖 45

證明如下：

圓公式為 $\dfrac{y-b}{x+a}\cdot\dfrac{y-1}{x-0}=-1$
代入 $y=0$ 且兩邊交叉相乘得
$b=-(x^2+ax)$
$x^2+ax+b=0$
$\therefore A$、 B 的 x 坐標便是該二次方程的解。

證明完畢。

當然，若該圓與 x 軸沒有交點，則 $x^2+ax+b=0$ 沒有解。
若該圓與 x 軸只有一個交點，則 $x^2+ax+b=0$ 便有二重根。

3.9　最短距離（一）

如圖 46，已知一綫段 L，及兩點 P、 Q 位於 L 的同一方。在 L 上作一點 T 使得 PT 及 QT 的長度之和最小。[5]

圖 46

作圖方法如下（圖 47）：

設 A 為綫段 L 較為接近 P 的一邊的端點。

1. 以 P 為圓心， PA 為半徑作一弧，交 L 於 A 及 B。
2. 以 A 為圓心， AP 為半徑作一弧，以 B 為圓心， BP 為半徑作一弧，兩弧相交於 P_1。
3. 連接 PP_1，交 L 於 S。
4. 連接 P_1Q，交 L 於 T。

作圖完畢。

[5]原題目為香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 2 題

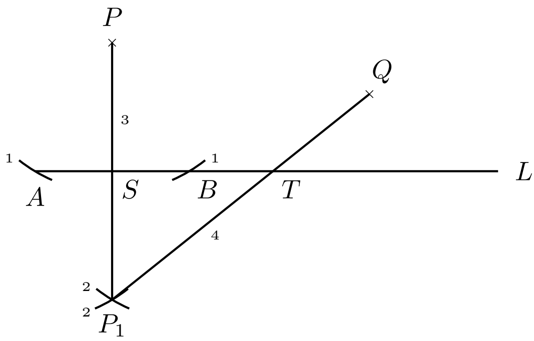


圖 47

證明如下：

$AP = AP_1$	（半徑）
$AB = AB$	（公共邊）
$BP = BP_1$	（半徑）
$\triangle APB \cong \triangle AP_1B$	（S.S.S.）
$\therefore \angle PBA = \angle P_1BA$	（全等三角形的對應角）
$BS = BS$	（公共邊）
$\triangle PBS \cong \triangle P_1BS$	（S.A.S.）
$\therefore \angle BSP = \angle BSP_1$	（全等三角形的對應角）
$= 90°$	（直綫上的鄰角）
$SP = SP_1$	（全等三角形的對應邊）
$ST = ST$	（公共邊）
$\therefore \triangle PST \cong \triangle P_1ST$	（S.A.S.）
$PT = P_1T$	（全等三角形的對應邊）

$PT + QT = P_1T + QT$

已知當 P_1、 T、 Q 共綫（collinear）時， $P_1T + QT$ 為最短。

$\therefore T$ 便是題目所需一點，證明完畢。

註： P_1 為 P 沿 L 的反射點。

3.10 最短距離（二）

如圖 48，已給 $\angle MON(< 60^\circ)$， A 在 OM 上， D 在 ON 上。在 ON 上找出 B 點，在 OM 上找出 C 點，使得 $AB + BC + CD$ 為最短。[6]

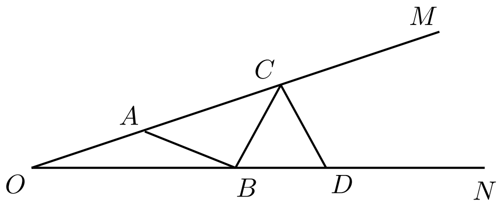


圖 48

作圖方法如下（圖 49）：

1. 將 N 沿 OM 反射，得 N_1 及 $\triangle MON_1$， D_1 為 D 的反射點。
2. 將 M 沿 ON_1 反射，得 M_1 及 $\triangle M_1ON_1$， A_1 為 A 的反射點。
3. 連接 A_1D，交 ON_1 於 B_1，交 OM 於 C。
4. 將 B_1 沿 OM 反射，得 B。

作圖完畢。

[6]此題是由香港數學競賽 1998/1999 初賽團體項目第 9 題轉化出來的。原題目為：
在圖中， $\angle MON$=20° ， A 為 OM 上的一點， $OA = 4\sqrt{3}$， D 為 ON 上的一點，$OD = 8\sqrt{3}$，C 為 AM 上的任意一點，B 為 OD 上的任意一點。若 $l = AB+BC+CD$，求 l 的最小值。

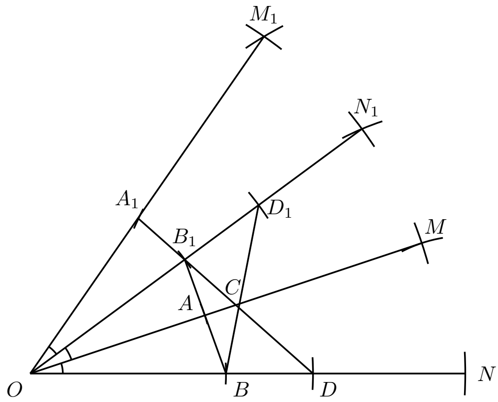


圖 49

證明如下：

由反射所得， $\triangle AB_1C \cong \triangle ABC$， $\triangle B_1CD_1 \cong \triangle BCD$， $\triangle A_1OB_1 \cong \triangle AOB_1$

$l = AB + BC + CD = AB_1 + B_1C + CD$

$l = A_1B_1 + B_1C + CD$

當 A_1、 B_1、 C、 D 共綫時， l 為最短。

證明完畢。

註一：為能確保可作一直綫 A_1D，橫過 OM 及 ON_1，

$3 \times \angle MON < 180°$，即 $\angle MON < 60°$

註二：若 A_1、 B_1、 C、 D 不成一直綫時（圖 50）， l 較長。

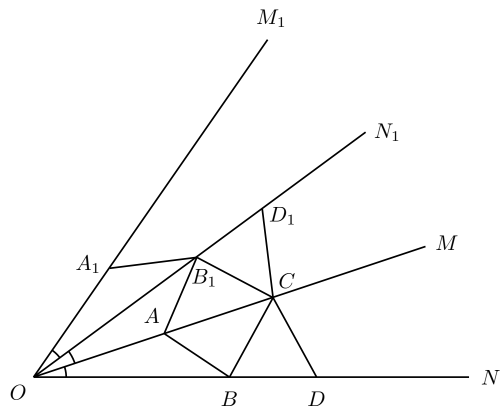


圖 50

練習題：

試將以下題目改寫，並以尺規作圖找出答案。

香港數學競賽 2006/2007 初賽團體項目第 9 題

在座標平面上，點 A=(-6,2)、 B=(-3,3)、 $C=(0,n)$ 及 $D=(m,0)$ 組成一個四邊形 $ABCD$。求 n 的值使得該四邊形 $ABCD$ 的周界為最短。

3.11　正方形內接三角形

已給銳角三角形 ABC，利用尺規作正方形 $PQRS$（P、 Q 在 BC 上，R 在 AC 上， S 在 AB 上）。

如圖 51，設 $RQ = x$， $BC = a$，由 A 至 BC 的高為 h。
$\triangle ASR \sim \triangle ABC$　　　（等角）

$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$

$xh = ah–ax$

$(a+h)x = ah$

$x = \frac{ah}{a+h}$

$\therefore$ 正方形的邊長（x）只與該三角形的底和高有關，而它（x）和三角形的形狀無關。

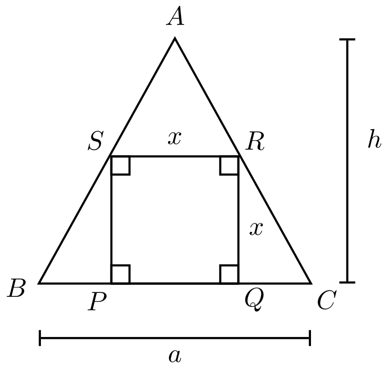


圖 51

考慮特殊情況：當 $\angle ACB = 90°$
若 $BC = a$， $AC = h$ 為固定值，則 x 不變。
正方形的 $\angle Q$=$\angle P = 90°$

$SC=$ 正方形的對角綫
$\therefore SC$ 平分 $\angle ACB$。

作圖方法如下（圖 52）：

1. 作 $\angle ACB$ 的角平分綫，交 AB 於 S。
2. 過 S 作一綫平行於 BC，交 AC 於 R。
3. 過 S 作一綫平行於 AC，交 BC 於 P。

$PCRS$ 便是該正方形了，作圖完畢。

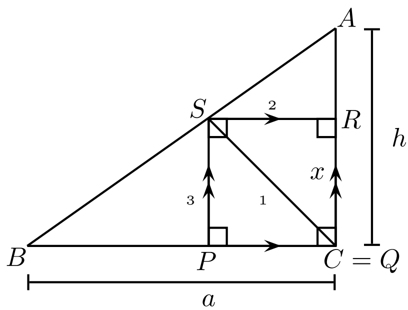


圖 52

一般情況，若 $\angle ACB \neq 90^\circ$，作圖方法如下。
方法一（圖 53）：

1. 過 C 作一綫垂直於 BC。
2. 過 A 作一綫平行於 BC，交步驟 1 的垂直綫於 H。
3. 連接 BH。
4. 作 $\angle BCH$ 的角平分綫，交 BH 於 I。
5. 過 I 作一綫平行於 BC，交 AB 於 S 及 AC 於 R。

6. 過 S 作一綫垂直於 BC，交 BC 於 P。

7. 過 R 作一綫垂直於 BC，交 BC 於 Q。

$PQRS$ 便是該正方形了，作圖完畢。

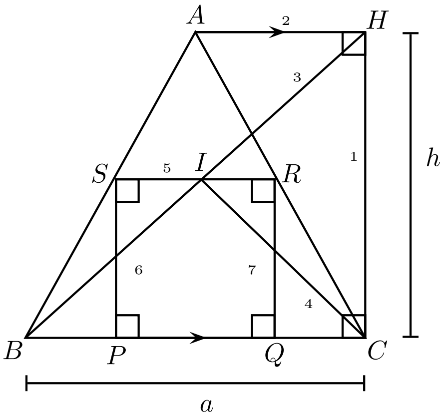


圖 53

註：若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，正方形 $PQRS$ 的底便有可能在三角形的底 BC 以外（圖 54）。
為確保 P、 Q 在 BC 以內， $\triangle ABC$ 必須為銳角三角形。

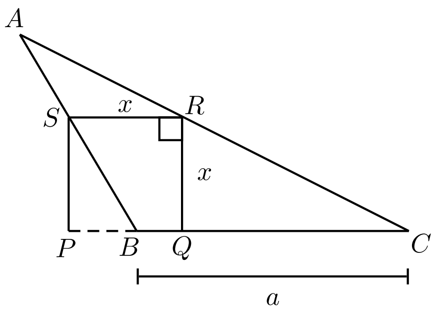


圖 54

方法二：

如上文， $x = \dfrac{ah}{a+h}$。
試考慮以下問題以作聯想：

如圖 55， AQC 為直綫， BA、 PQ 及 DC 互相平行。若 $AB = a$，$CD = h$ 及 $PQ = x$，以 a 及 h 表示 x。

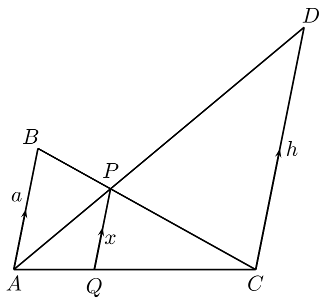


圖 55

$\angle PCQ = \angle BCA$	(公共角)
$\angle CPQ = \angle CBA$	(同位角， $PQ//BA$)
$\angle CQP = \angle CAB$	(同位角， $PQ//BA$)
$\therefore \triangle CPQ \sim \triangle CBA$	(等角)
$\angle PAQ = \angle DAC$	(公共角)
$\angle APQ = \angle ADC$	(同位角， $PQ//DC$)
$\angle AQP = \angle ACD$	(同位角， $PQ//DC$)
$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ADC$	(等角)
$\dfrac{x}{a} = \dfrac{QC}{AC} \ldots (1)$	(相似三角形的對應邊)
$\dfrac{x}{h} = \dfrac{AQ}{AC} \ldots (2)$	(相似三角形的對應邊)

(1)+(2)

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{h} = \frac{AQ}{AC} + \frac{QC}{AC} = 1$$

$$x = \frac{ah}{a+h}$$

作圖方法如下（圖 56）：

1. 過 A 作 AD 垂直於 BC， D 為垂足。
2. 過 B 作一直綫垂直於 BC。
3. 以 B 為圓心， BC 為半徑作一弧，交步驟 2 的垂直綫於 E。
4. 連接 DE，交 AB 於 S。
5. 過 S 作 SP 垂直於 BC， P 為垂足。
6. 過 S 作 SR 平行於 BC，交 AC 於 R。
7. 過 R 作 RQ 垂直於 BC， Q 為垂足。

那麼， $PQRS$ 便是一正方形，滿足以上條件。

作圖完畢。

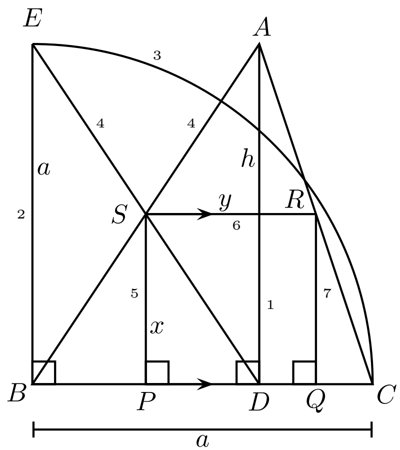


圖 56

證明如下：

設 $SP = x$， $SR = y$。明顯地， $PQRS$ 為一長方形。
由上文得知， $x = \dfrac{ah}{a+h} \ldots$（1）
易證 $\triangle ASR \sim \triangle ABC$ （等角）
$\therefore \dfrac{y}{a} = \dfrac{h-x}{h}$
$y = \dfrac{a}{h}(h-x) \ldots$（2）

代（1）入（2）：
$y = \dfrac{a}{h}(h - \dfrac{ah}{a+h}) = a(1 - \dfrac{a}{a+h}) = \dfrac{a}{a+h}(a+h-a) = \dfrac{ah}{a+h} = x$

因此， $PQRS$ 為一正方形，證明完畢。

3.12　在正方形內找出滿足已知條件的點

如圖 57，在正方形 $ABCD$ 內找出一點 P，使得 $PA:PB:PC$=1:2:3。[7]

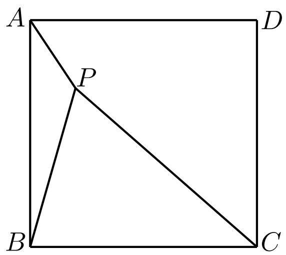


圖 57

分析方法如下（圖 58）：

設 $AP=a$、 $PB=2a$ 及 $PC=3a$。
將 $\triangle APB$ 以 B 為中心點逆時針旋轉 $90°$，得 $\triangle EQB$。
$\triangle APB \cong \triangle EQB$　　（由旋轉所得）
$EQ=a$， $BQ=2a=BP$
連接 AQ。
$\angle PBQ=90°$　　（由旋轉所得）
$\angle ABQ=90°-\angle ABP=\angle PBC$
$AB=BC$
$\triangle ABQ \cong \triangle CBP$　　（S.A.S.）
$AQ=CP=3a$　　（全等三角形的對應邊）

[7]此題是由香港數學競賽 1998/1999 初賽團體項目第 10 題轉化出來的。原題目為：在圖中， P 為正方形 $ABCD$ 內一點， $PA=a$， $PB=2a$， $PC=3a(a>0)$。若 $\angle APB=x°$，求 x 的值。

$\because \angle PBQ = 90^\circ$ （由旋轉所得）

$\therefore PQ^2 = PB^2 + QB^2$ （畢氏定理）

$= (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

$AP^2 + PQ^2 = a^2 + 8a^2 = 9a^2$

$AQ^2 = (3a)^2 = 9a^2$

$\therefore AP^2 + PQ^2 = AQ^2$

$\angle APQ = 90^\circ$ （畢氏定理的逆定理）

$\because \angle PBQ = 90^\circ$ 及 $PB = QB$ （由旋轉所得）

$\therefore \angle BPQ = 45^\circ$ （三角形內角和）

$\angle APB = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

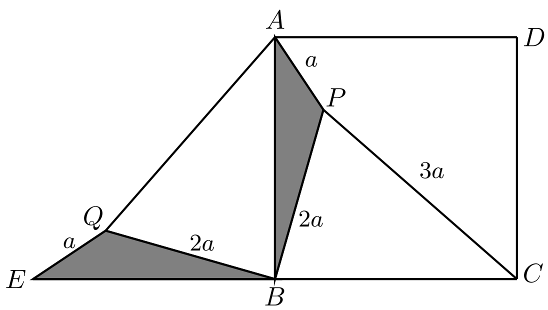


圖 58

作圖方法如下（圖 59，圖 60 及圖 61）：

1. 於 AB 作垂直平分綫得中點 E。

2. 以 E 為圓心， EA 為半徑向外作一半圓；延伸垂直平分綫交半圓於 F。

3. 連接 AF、 FB（圖 59）。
   $\angle AFB = 90^\circ$ （半圓上的圓周角）
   顯然易見， $\triangle AFB$ 為直角等腰三角形。

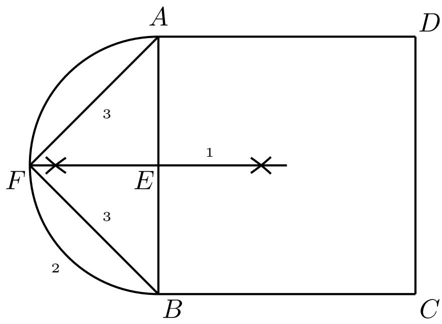


圖 59

4. 以 F 為圓心， FA 為半徑作一圓（圖 60）。

5. EF 的延長綫交圓於 G。

6. 利用截綫定理找出一點 H，使得 $AH : HB = 1 : 2$。設 $AH = k$，$HB = 2k$。

7. 連接 GH 並延長交圓於 P。連接 PA 及 PB。

$\triangle AGE \cong \triangle BGE$	（S.A.S.）
$\therefore AG = BG$	（全等三角形的對應邊）
設 $\angle APG = \angle BPG = \theta$	（等弦對等角）
設 $\angle AHP = \alpha$	
$\angle BHP = 180° - \alpha$	（直綫上的鄰角）
$k : \sin\theta = AP : \sin\alpha \ \cdots\cdots \ (1)$	（於 $\triangle AHP$ 應用正弦定理）
$2k : \sin\theta = BP : \sin(180°-\alpha) \ \cdots\cdots \ (2)$	（於 $\triangle BHP$ 應用正弦定理）
利用 $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$;	
$(1) \div (2) \quad 1 : 2 = AP : BP$	
設 $AP = a$， $BP = 2a$	
$\angle APB = \frac{1}{2} \times$反角$\angle AFB$	（圓心角兩倍於圓周角）
$= \frac{1}{2} \cdot 270° = 135°$	（同頂角）

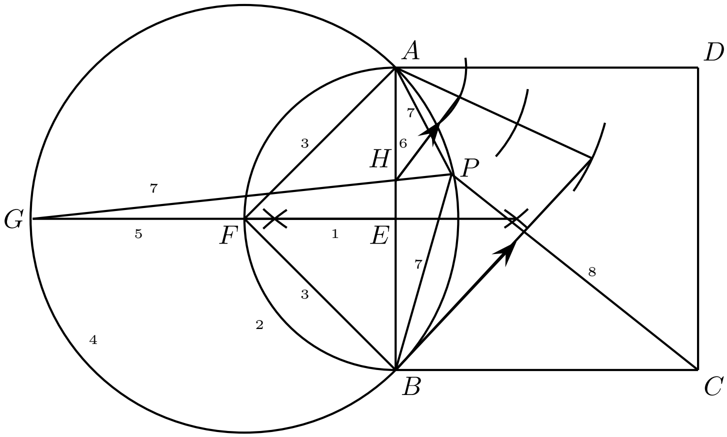


圖 60

8. 連接 PC，將 $\triangle APB$ 以 B 為中心點逆時針旋轉 90°，得 $\triangle EQB$（圖 61）。

作圖完畢。

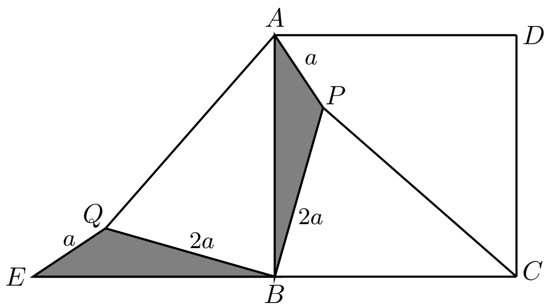


圖 61

證明如下：

$\triangle APB \cong \triangle EQB$ （由旋轉所得）

$\angle PBQ = 90^\circ$ 及 $PB = QB$ （由旋轉所得）

$\triangle PBQ$ 為一直角等腰三角形

$\angle BPQ = 45^\circ$ （三角形內角和）

$\therefore PQ^2 = PB^2 + QB^2$ （畢氏定理）

$= (2a)^2 + (2a)^2 = 8a^2$

$\angle APQ = 135^\circ – 45^\circ = 90^\circ$

$\therefore \triangle APQ$ 為直角三角形

$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 = a^2 + 8a^2$ （畢氏定理）

$AQ = 3a$

$\angle ABQ = 90^\circ – \angle ABP = \angle PBC$

$AB = CB$

$PB = QB$

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle CBP$ （S.A.S.）

$CP = AQ = 3a$ （全等三角形的對應邊）

$\therefore PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$。

P 滿足以上要求，證明完畢。

第 4 章　三角形

4.1　作已知三條中綫的三角形

已給三角形的三條中綫，用尺規作該三角形。

為了作該三角形，我們首先證明三條中綫共點（concurrent），了解其原理。假設其中兩條中綫 BQ 和 CR 相交於 G（圖 62）。

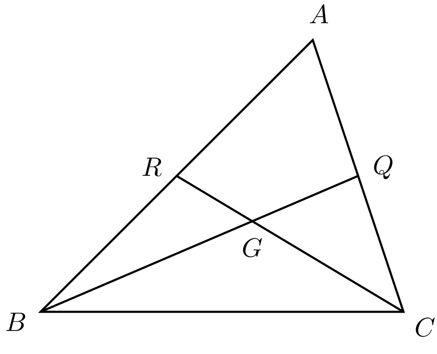


圖 62

連接 AG 並延長至 D，使得 $AG = GD$。

假設 AGD 交 BC 於 P。連接 BD、 CD。

過 Q 作 QL 平行於 AD，交 BD 的延長綫於 L（圖 63）。

由中點定理得知 $GQ=\frac{1}{2}DC$， $GQ//DC$，及 $GR=\frac{1}{2}DB$， $GR//DB$。

$\because GQ//DC$， $GR//DB$。
$\therefore BDCG$ 為一平行四邊形。　　　　　　（平行四邊形的定義）
$BP=PC$　　　　　　（平行四邊形對角綫）
因此， AGP 為 $\triangle ABC$ 的中綫。三條中綫共點。

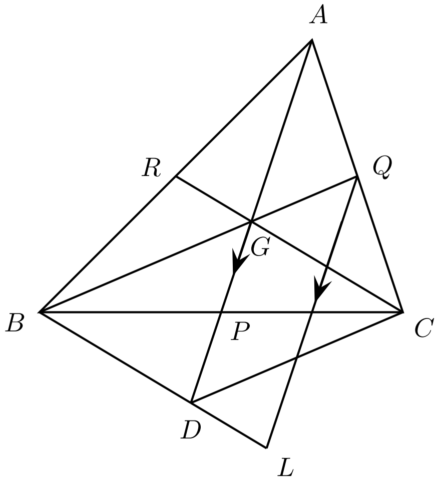


圖 63

更進一步，$GQ=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BG$　　　　　　（平行四邊形對邊）
$GR=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}CG$　　　　　　（平行四邊形對邊）
$\therefore BG:GQ=CG:GR=2:1$。
易證 $AG:GP=2:1$。
$\therefore$ 每條中綫將其餘兩條分成 $2:1$。

另外， $\triangle BQL$ 的邊長分別為 3 條中綫的長度。

作圖方法如下（圖 64 及圖 65）：

假設三條中綫長度為 p、 q 及 r。

1. 作 $\triangle BQL$，長度為 $QL = p$、 $BQ = q$ 及 $LB = r$。
2. 利用垂直平分綫找出 QL 的中點 E，連接 BE。
3. 利用截綫定理，在 BE 上找出 P，使得 $BP = 2PE$。

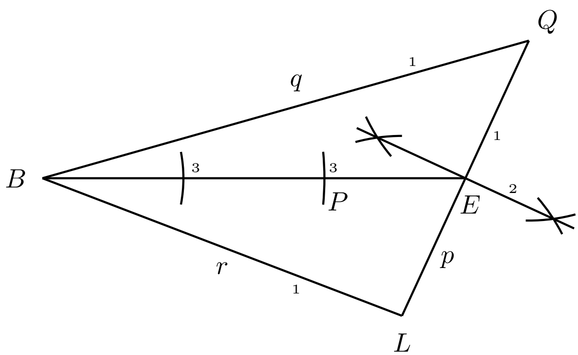


圖 64

4. 在 BE 延長綫上找出 C，使得 $PE = EC$。
5. 連接 CQ 並延長至 A，使得 $CQ = QA$。
6. 連接 AB。

作圖完畢。

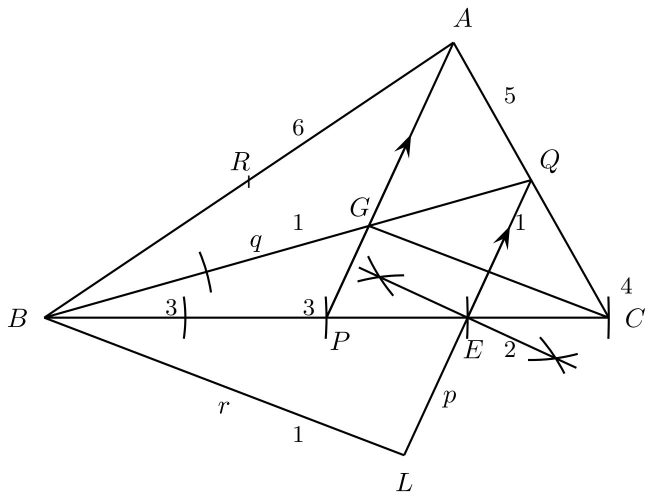


圖 65

證明如下：

$BQ = q$ 為 $\triangle ABC$ 的中綫。	（$\because AQ = QC$）
E 為 CP 的中點，及 Q 為 AC 的中點	
$AP = 2QE = QL$	（中點定理）
$AP = p$ 為 $\triangle ABC$ 的中綫。	（$\because BP = PC$）
設 R 為 AB 的中點	
$BR = \frac{1}{2}AB = PQ$ 及 $PQ//BR$	（中點定理）
$\because PE = EC$ 及 $QE = EL$	（由作圖所得）
$PQCL$ 為一平行四邊形	（對角綫互相平分）
$CL = QP$ 及 $CL//QP$	（平行四邊形對邊）
$\therefore BR = LC$ 及 $BR//LC$	
$BRCL$ 為一平行四邊形	（對邊平行且相等）
$\therefore CR = LB = r$	（平行四邊形對邊）
$CR = r$ 為 $\triangle ABC$ 的中綫	（$\because AR = RB$）

證明完畢。

4.2 作已知一底角、中綫及高的三角形

已給 1 單位長度，用尺規作 $\triangle ABC$，並滿足以下條件：
$\angle B = 30^\circ$，中綫 $AM = 3$ 單位及高度 $AH = 2.5$ 單位。[1]

作圖方法如下（圖 66 及圖 67）：

1. 作綫段 $AH = 2.5$ 單位。

2. 以 A 為圓心，AH 為半徑作一弧。以 H 為圓心，HA 為半徑作一弧。此兩弧相交於 J。$\triangle AJH$ 為一等邊三角形，$\angle HAJ = \angle AJH = \angle AHJ = 60^\circ$。

3. 以 H 為圓心，HJ 為半徑作一弧。以 J 為圓心，JH 為半徑作一弧。此兩弧相交於 K。$\triangle JHK$ 為一等邊三角形，$\angle JKH = \angle HJK = \angle KHJ = 60^\circ$。

4. 以 K 為圓心，KJ 為半徑作一弧。以 J 為圓心，JK 為半徑作一弧。此兩弧相交於 B。$\triangle JKB$ 為一等邊三角形，$\angle JKB = \angle BJK = \angle KBJ = 60^\circ$。

5. 連接 BJ、AJ、JH 及 BH。
   $\angle BJH = \angle BJK + \angle HJK = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$
   $\because BJ = JH$ （由作圖所得）
   $\therefore \angle JBH = \angle JHB = 30^\circ$（等腰三角形底角）
   $\angle AHB = \angle JHB + \angle AHJ = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

[1] 原題目為 Q1(b), Ordinary Level Pure Mathematics Paper II, HKU Matriculation Examination (June 1955)
Construct (with ruler and compasses only) the triangle ABC given that $\angle B = 30^\circ$, median $AM = 3$ cm, height $AH = 2.5$ cm.
Show clearly all the lines and arcs of the construction, but no proof is required.

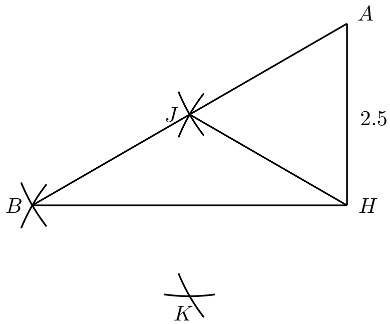


圖 66

6. 以 A 為圓心，半徑為 3 單位作一弧，分別交 BH 及其延長綫於 M_1 及 M_2。
7. 在 BH 的延長綫上，找出兩點 C_1 及 C_2，使得 $BM_1 = M_1C_1$ 及 $BM_2 = M_2C_2$。

$\triangle ABC_1$ 及 $\triangle ABC_2$ 滿足所有條件，作圖完畢。

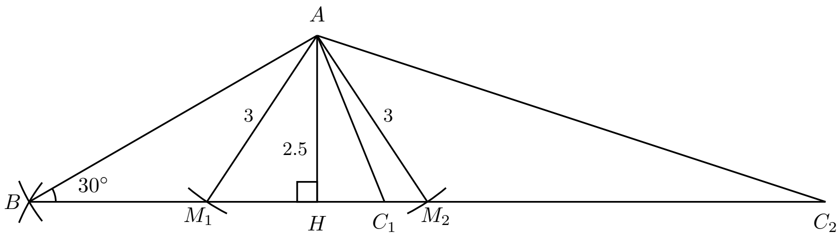


圖 67

4.3 作已知底長、中綫及頂角的三角形

作三角形 PQR，其中 $PQ = 8$ 單位， $\angle PRQ = 45^\circ$ 及中綫 $RX = 6$ 單位。

作圖方法如下（圖 68）：

1. 作 $PQ = 8$ 單位。
2. 作 PQ 的垂直平分綫 MXN， X 為 PQ 的中點， $PX = XQ$。
3. 以 X 為圓心，半徑為 6 單位作一半圓 ABC，其中 A、 Q、 X、 P、 C 共綫， AC 為半圓的直徑。
4. 過 P 作 PD 垂直於 PQ 交半圓於 D。
5. 作 $\angle DPX$ 的角平分綫，交 NM 或其延長綫於 O。 $\angle DPO = 45^\circ$。
6. 連接 OQ。
7. 以 O 為圓心， $OP = OQ$ 為半徑作一圓經過 P， Q。此圓交弧 ABC 於 R 和 E。
8. 連接 PR 和 QR。

作圖完畢。

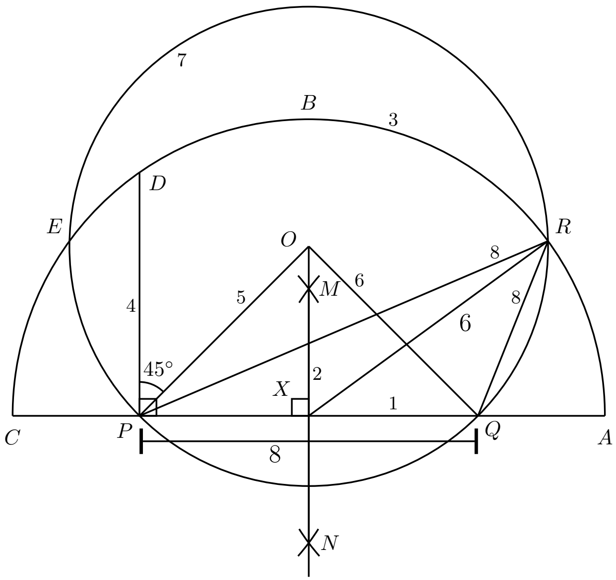


圖 68

證明如下：

$\angle POX = 45°$　（錯角， $DP//MX$）
$\triangle POX \cong \triangle QOX$　（S.A.S.）
$\angle QOX = 45°$　（全等三角形的對應角）
$\angle POQ = 90°$
$\angle PRQ = 45°$　（圓心角兩倍於圓周角）

$\triangle PRQ$ 便是所需三角形，證明完畢。

註： $\triangle PEQ$ 也是另一個三角形，滿足所需條件。

4.4 作已知底長、一底角及其餘兩邊之和的三角形

如圖 69， AB 為三角形 ABC 的底，且 BD 的長度是 BC 及 CA 長度的和。已知 $\angle ABC = 60°$，試作三角形 ABC。 [2]

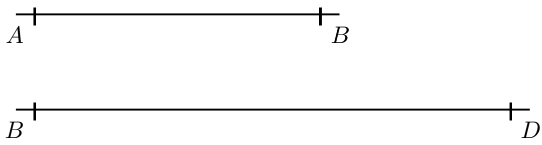


圖 69

作圖方法如下（圖 70）：

1. 以 A 為圓心， AB 為半徑作一弧。以 B 為圓心， BA 為半徑作一弧；此兩弧相交於 P， ABP 為一等邊三角形， $\angle ABP = 60°$。
2. 以 B 為圓心， BD 為半徑作一弧，與 BP 之延長綫相交於 D。
3. 連接 AD。
4. 作 AD 的垂直平分綫交 BD 於 C， N 為 AD 的中點。
5. 連接 AC。

作圖完畢。

證明如下：

$\triangle ANC \cong \triangle DNC$	（S.A.S.）
$\therefore AC = DC$	（全等三角形的對應邊）
$AC + CB = BC + CD = BD$	
$\triangle ABC$ 便是該三角形。	

證明完畢。

[2]香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 2 題

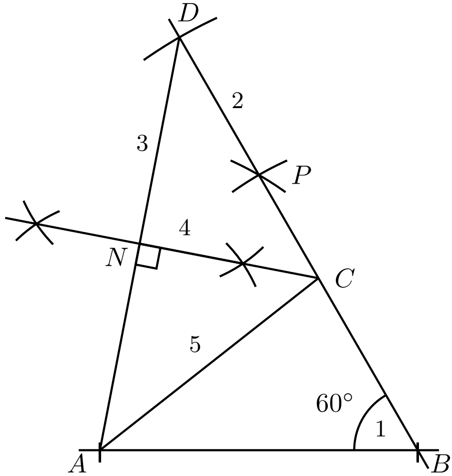


圖 70

4.5　作已知底長、頂角及其餘兩邊之和的三角形

如圖 71， AB 為三角形 ABC 的底，且 BD 的長度是 BC 及 CA 長度的和。已知 $\angle ACB = 60°$，試作三角形 ABC。

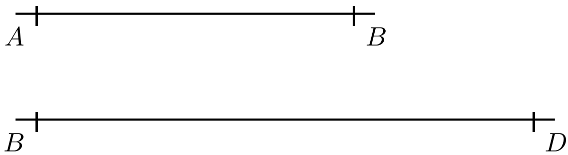


圖 71

作圖方法如下（圖 72）：

1. 作等邊三角形 ABP， $\angle APB = 60°$。
2. 以 P 為圓心， PA 為半徑作一圓經過 A、 B。
3. 分別作 $\angle BAP$ 和 $\angle ABP$ 的角平分綫，相交於 O。
4. 以 O 為圓心， $OA = OB = OP$ 為半徑作一圓經過 A、 B、 P。
5. 以 B 為圓心， BD 為半徑作一弧。此弧與步驟 2 的圓交於 D。
6. 連接 BD，交步驟 4 的圓於 C。
7. 連接 AC。

作圖完畢。

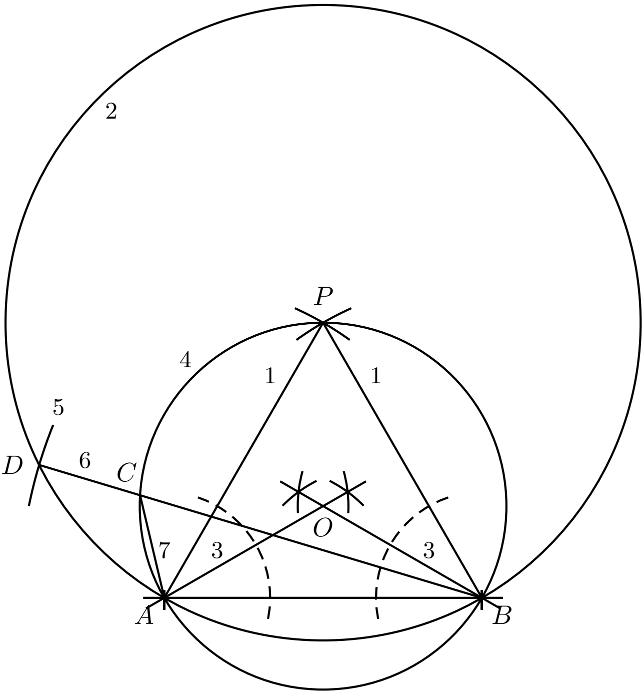


圖 72

證明如下：

$\angle APB = 60^\circ$　（等邊三角形性質）
$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle APB = 30^\circ$　（圓心角兩倍於圓周角）
$\angle ACB = \angle APB = 60^\circ$　（同弓形上的圓周角）
$\angle CAD = 60^\circ – 30^\circ = 30^\circ$　（$\triangle ACD$ 的外角）
$\therefore AC = CD$　（等角對等邊）
$\therefore AC + CB = CD + BC = BD$
$\triangle ABC$ 便是該三角形，證明完畢。

[編者按：上述步驟 5 中，以 B 為圓心， BD 為半徑作一弧，亦可與步驟 2 的圓交於另一點 D'。 BD' 交步驟 4 的圓於 C'。 $\triangle ABC'$ 亦為另一所需三角形。]

4.6 作已知底長、頂角及其餘兩邊之比的三角形

如圖 73，給定一綫段 AB。試作三角形 ABC 使 $AC : BC = 3 : 2$ 及 $\angle ACB = 60°$。[3]

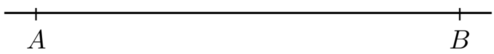


圖 73

作圖方法如下：

方法一（圖 74）：

1. 作等邊三角形 ABE。
2. 分別作 AB 和 AE 的垂直平分綫，相交於 O， M 為 AB 的中點。
3. 以 O 為圓心， OA 為半徑作外接圓 ABE。
4. 利用截綫定理在 AB 上找出一點 D，使得 $AD : DB = 3 : 2$。
5. AB 的垂直平分綫交劣弧於 X。延長 XD 並交圓 ABE 於 C。連接 AC 及 BC。

作圖完畢。

[3]原題目為香港數學競賽 2009/2010 初賽（幾何作圖）第 3 題

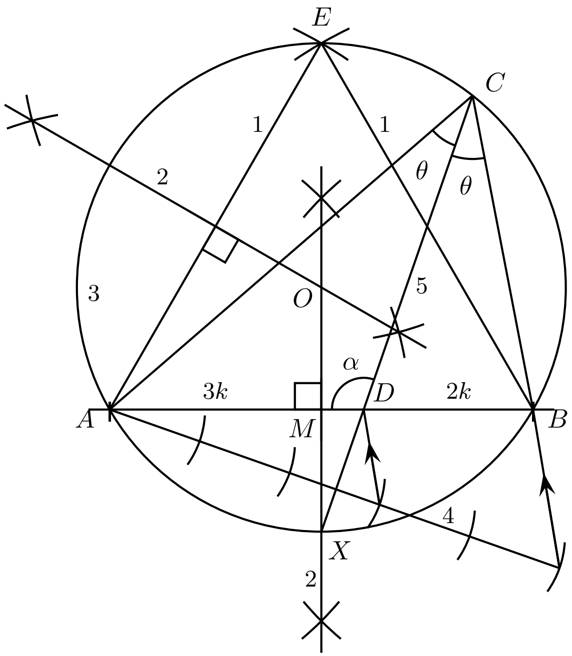


圖 74

證明如下：

設 $\angle ACD = \theta$， $\angle ADC = \alpha$， $AD = 3k$ 及 $DB = 2k$。

$\triangle AMX \cong \triangle BMX$	（S.A.S）
$AX = BX$	（全等三角形的對應邊）
$\angle ACX = \angle BCX = \theta$	（等弦對等角）
$\angle ADC = \alpha, \angle BDC = 180°-\alpha$	（直綫上的鄰角）
$3k : \sin\theta = AC : \sin\alpha \cdots\cdots (1)$	（在 $\triangle ACD$ 應用正弦定理）
$2k : \sin\theta = BC : \sin(180° - \alpha) \cdots\cdots (2)$	（在 $\triangle BCD$ 應用正弦定理）

利用恒等式 $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$；
(1) ÷ (2)：　　$3 : 2 = AC : BC$
$\angle ACB = \angle AEB = 60°$　　（同弓形上的圓周角）
$\triangle ABC$ 便是所需三角形。

方法二（圖 75）：

1. 以 A 為圓心，給定 AB 的長為半徑作一弧（B 點位置未定）。
2. 作等邊三角形 $\triangle AHP$（H 是在步驟 1 的弧上任意一點）。
3. 利用截綫定理在 PH 上找出一點 M，使得 $PM = \dfrac{2}{3}PH$。
4. 將 AM 延長，交弧 PH 於 B。
5. 過 B 作 $BC//HP$，與 AP 的延長綫交於 C。

作圖完畢。

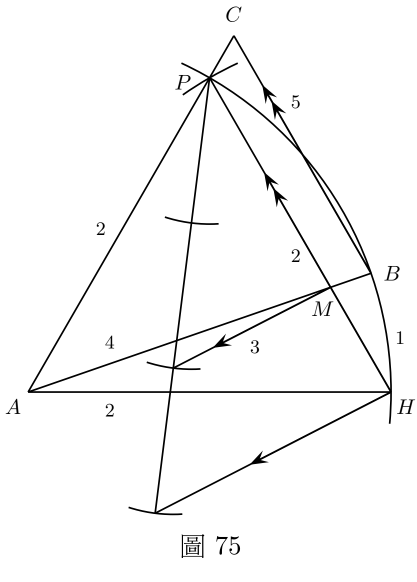


圖 75

證明如下：

$\angle APH = 60°$　　（等邊三角形性質）

$\angle ACB = 60°$　　（同位角， $PH//CB$）

$\triangle ABC \sim \triangle AMP$　　（等角）

$$\begin{aligned} AC : CB &= AP : PM \\ &= PH : PM = 3 : 2 \end{aligned}$$
（相似三角形的對應邊）

$\triangle ABC$ 便是該三角形。

證明完畢。

4.7 最短周界

如圖 76， $\triangle ABC$ 為一銳角三角形。 P_1 是 AC 上的一點。試作三角形 P_1XY ，使得 X 及 Y 分別為 AB 及 BC 上的一點，且 $\triangle P_1XY$ 的周界為最短。 [4]

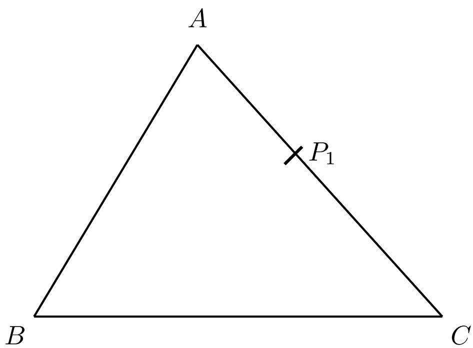


圖 76

作圖方法如下（圖 77）：

1. 以 A 為圓心， AC 為半徑作一弧。
2. 以 B 為圓心， BC 為半徑作一弧；此兩弧相交於 C'。
3. 以 C 為圓心， CA 為半徑作一弧。
4. 以 B 為圓心， BA 為半徑作一弧；此兩弧相交於 A'。
5. 以 A 為圓心， AP_1 為半徑作一弧，交 AC' 於 P。
6. 以 C 為圓心， CP_1 為半徑作一弧，交 CA' 於 P_2。
7. 連接 PP_2，交 AB 於 X 及 BC 於 Y。

[4]香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 3 題

8. 連接 P_1X、 YP_1。

作圖完畢。

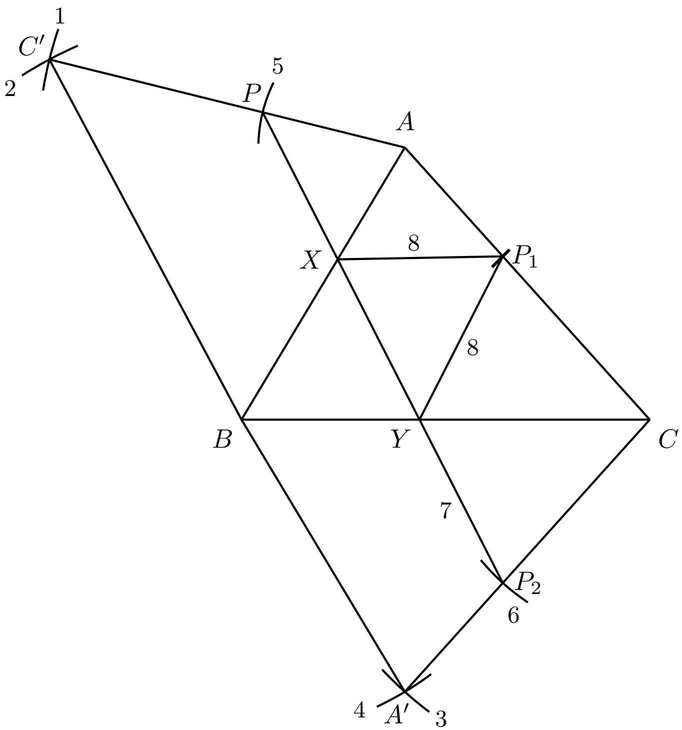


圖 77

證明如下：

$\triangle ABC \cong \triangle ABC'$	（S.S.S.）
$\therefore \angle BAC = \angle BAC'$	（全等三角形的對應角）
$\triangle ABC \cong \triangle A'BC$	（S.S.S.）
$\therefore \angle ACB \cong \angle A'CB$	（全等三角形的對應角）
$AX = AX$	（公共邊）
$AP = AP_1$	（由作圖所得）
$\angle P_1AX = \angle PAX$	（已證）
$\therefore \triangle APX \cong \triangle AP_1X$	（S.A.S.）
$\therefore PX = P_1X$	（全等三角形的對應邊）
$CY = CY$	（公共邊）
$CP_1 = CP_2$	（由作圖所得）
$\angle P_1CY = \angle P_2CY$	（已證）
$\therefore \triangle CP_1Y \cong \triangle CP_2Y$	（S.A.S.）
$\therefore P_1Y = P_2Y$	（全等三角形的對應邊）

不論 X 和 Y 的位置， P 和 P_2 的位置固定。
$\triangle P_1XY$ 的周界 $=PX + XY + YP_2$
當 P、 X、 Y、 P_2 共綫時， $PX + XY + YP_2$ 為最短。
$\triangle P_1XY$ 便是該三角形。

證明完畢。

4.8 作已知三角形的周界及兩底角的三角形

試作三角形 PQR，使得 $\angle Q = 60^\circ$， $\angle R = 67.5^\circ$ 及周界為 8 單位。

作圖方法如下：

方法一（圖 78）：

1. 作一綫段 $AB = 8$ 單位。
2. 作 $\angle BAC = 60^\circ$， $\angle ABD = 67.5^\circ$。
3. 分別作 $\angle BAC$ 及 $\angle ABD$ 的角平分綫，此兩角平分綫相交於 P。
4. 作 PA 和 PB 的垂直平分綫 QE 和 RF，分別交 AB 於 Q 和 R。E 和 F 分別是 PA 和 PB 的中點。
5. 連接 PQ 和 PR。

$\triangle PQR$ 便是所需的三角形，作圖完畢。

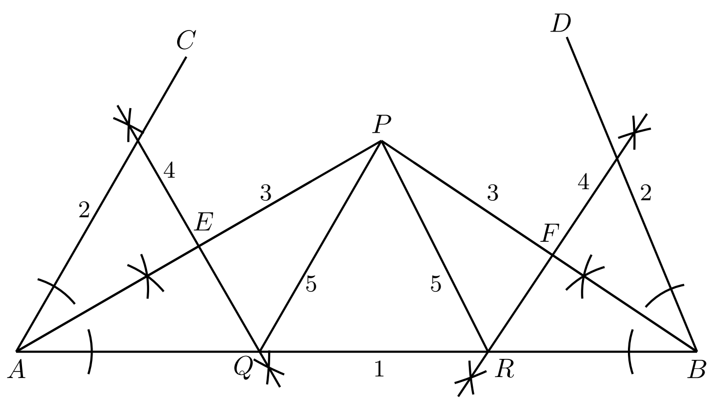


圖 78

證明如下：

$\triangle PQE \cong \triangle AQE$ （S.A.S.）
$\therefore \angle QPE = \angle QAE$ （全等三角形的對應角）
$\triangle PRF \cong \triangle BRF$ （S.A.S.）
$\therefore \angle RPF = \angle RBF$ （全等三角形的對應角）
$\angle PQR = 2\angle QAP = 60°$ （三角形外角）
$\angle PRQ = 2\angle PBA = 67.5°$ （三角形外角）
$PQ + QR + RP = AQ + QR + RB = 8$ 單位

證明完畢。

方法二（圖 79）：

步驟 1 至 3 與方法一相同。

4. 過 P 作一綫平行 CA 交 AB 於 Q，過 P 作一綫平行 DB 交 AB 於 R。

$\triangle PQR$ 便是所需三角形。作圖完畢。

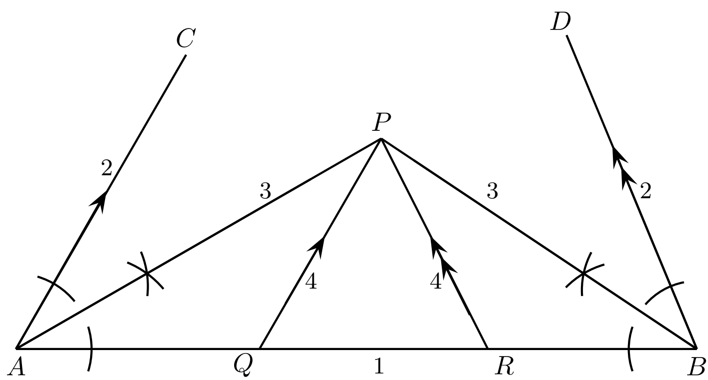


圖 79

證明如下：

$\angle QPA = \angle PAC$ （錯角， $PQ//CA$）
$\angle PAQ = \angle PAC$ （PA 為角平分綫）
$\therefore \angle QPA = \angle PAQ$
$\therefore PQ = AQ$ （等角對等邊）
$\angle RPB = \angle PBD$ （錯角， $PR//DB$）
$\angle PBA = \angle PBD$ （PB 為角平分綫）
$\therefore \angle RPB = \angle PBA$
$\therefore RP = RB$ （等角對等邊）
$\angle PQR = 2\angle QAP = 60°$ （三角形外角）
$\angle PRQ = 2\angle PBR = 67.5°$ （三角形外角）
$PQ + QR + RP = AQ + QR + RB = 8$ 單位

證明完畢。

4.9 作一等邊三角形，使其頂點在三條平行綫上

已知三條平行綫 $AB//EF//CD$，試作一等邊三角形，使其頂點分別在三條平行綫上。

作圖方法如下（圖 80）：

1. 在 AB 上取任意一點 Y。 過 Y 作一綫垂直於 AB，交 CD 於 X 及 EF 於 R。
2. 作一等邊三角形 XYZ。
3. 連接 ZR。
4. 過 Z 作一綫垂直於 ZR，交 AB 於 P 及 CD 於 Q。
5. 連接 PR 及 QR。 $\triangle PQR$ 為所需的三角形。

作圖完畢。

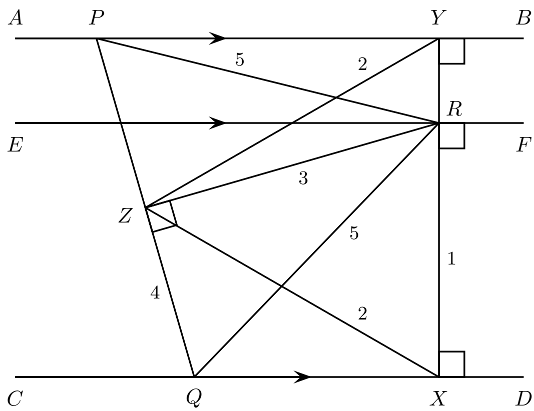


圖 80

證明如下：

$PQ \perp ZR$ 及 $AB \perp YR$	（由作圖所得）
$\therefore P$、Y、R、Z 四點共圓	（外角 = 內對角）
$\angle RPZ = \angle RYZ$	（同弓形上的圓周角）
$= \angle XYZ = 60°$	
$PQ \perp ZR$ 及 $CD \perp RX$	（由作圖所得）
$\therefore Q$、X、R、Z 四點共圓	（外角 = 內對角）
$\angle RQZ = \angle RXZ$	（同弓形上的圓周角）
$= \angle YXZ = 60°$	
$\angle PRQ = 180° - 60° - 60° = 60°$	（三角形內角和）
$\therefore \triangle PQR$ 為一等邊三角形。	

證明完畢。

4.10 作一直角等腰三角形，使其頂點在三條平行綫上

已給三條平行綫 L_1、 L_2 及 L_3，其中 L_2 在 L_1 及 L_3 之間。試作一直角等腰三角形，使其頂點分別在該三條平行綫上。[5]

基礎分析：

如圖 81， $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形， C 為直角頂點。過 A、 B 分別作直綫 l_1、 l_2 與 AB 垂直。過 C 作綫段 PQ，與 l_1、 l_2 依次交於 P、 Q。過 C 作 PQ 的垂直綫，與 AB 相交於 R。連接 PR 及 QR。試證 $\triangle PQR$ 為等腰直角三角形。

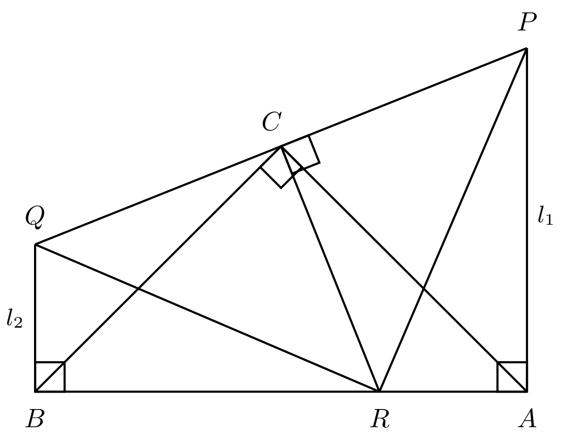


圖 81

[5]原題目為 1973 香港中文中學會考高級數學試卷二 Q7

證明如下：

$\angle RCP + \angle PAR = 180^\circ$	（由作圖所得）
$\therefore APCR$ 為一個圓內接四邊形。	（對角互補）
$\angle CPR = \angle CAR$	（同弓形上的圓周角）
$\quad = 45^\circ$	（$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形）
$\angle QBR = \angle RCP = 90^\circ$	（已知）
$\therefore BQCR$ 為一個圓內接四邊形。	（外角 $=$ 內對角）
$\angle CQR = \angle CBR$	（同弓形上的圓周角）
$\quad = 45^\circ$	（$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形）
$\therefore \angle PRQ = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$	（$\triangle PQR$ 的內角和）
$\therefore \triangle PQR$ 為一個等腰直角三角形。	

作圖方法如下：

方法一（圖 82）：

1. 在 L_1 上取任意一點 N。
   過 N 作一綫垂直於 L_2 及 L_3，交 L_2 於 K 及 L_3 於 M。
2. 利用垂直平分綫，找出 NK 的中點 C。
3. 以 M 為圓心， CM 為半徑作一半圓，交 L_3 於 A、 B。
4. 連接 AC、 BC。
5. 過 A 作一綫垂直於 L_3，交 L_1 於 P。
6. 過 B 作一綫垂直於 L_3，交 L_2 於 Q。
7. 連接 CP 及 CQ。（P、 C、 Q 共綫，見證明部分。）
8. 過 C 作一綫垂直於 PQ，交 L_3 於 R。連接 PR 及 QR。

作圖完畢。

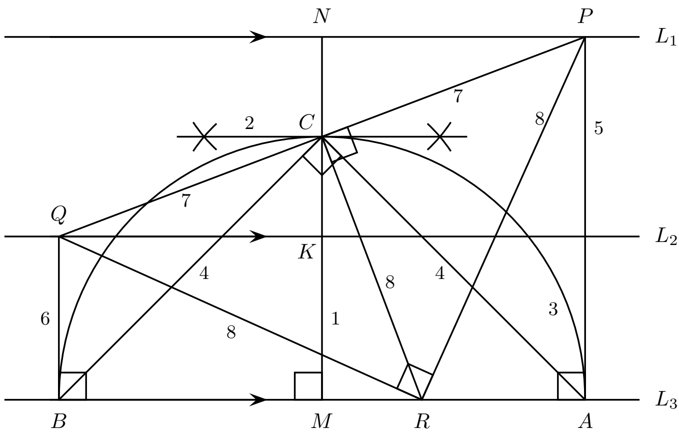


圖 82

證明如下：

$MA = MC = MB$ （半徑）

$\triangle AMC$ 及 $\triangle BMC$ 為全等的等腰直角三角形 （S.A.S.）

$AC = BC$ （全等三角形的對應邊）

$\angle ACB = 90°$ （半圓上的圓周角）

同樣， $\triangle ABC$ 為一個等腰直角三角形。

$\because NC = CK$ （由作圖所得）

$\angle CNP = 90° = \angle CKQ$ （由作圖所得）

$QK = BM = MA = NP$ （長方形性質）

$\therefore \triangle QCK \cong \triangle PCN$ （S.A.S.）

$\angle QCK = \angle PCN$ （全等三角形的對應角）

$\angle QCN = 180° - \angle QCK$ （直綫上的鄰角）

$\therefore \angle PCN + \angle QCN = 180°$

P、 C、 Q 共綫 （直綫上的鄰角互補）

$PC = CQ$ （全等三角形的對應邊）

由基礎分析的結果， $\triangle PQR$ 為一個等腰直角三角形。

證明完畢。

方法二（由荃灣官立中學徐李炘提供）（圖 83）：

1. 在 L_1 上取任意一點 A。
   過 A 作一綫垂直於 L_2 及 L_3，交 L_2 於 B 及 L_3 於 R。
2. 過 A 作一綫段，與 L_1 成 45°，交 L_2 於 Q。
3. 連接 QR。
4. 過 Q 作一綫段，與 QR 互相垂直，交 L_1 於 P。
5. 連接 PR。

則 $\triangle PQR$ 便是一個等腰直角三角形了。作圖完畢。

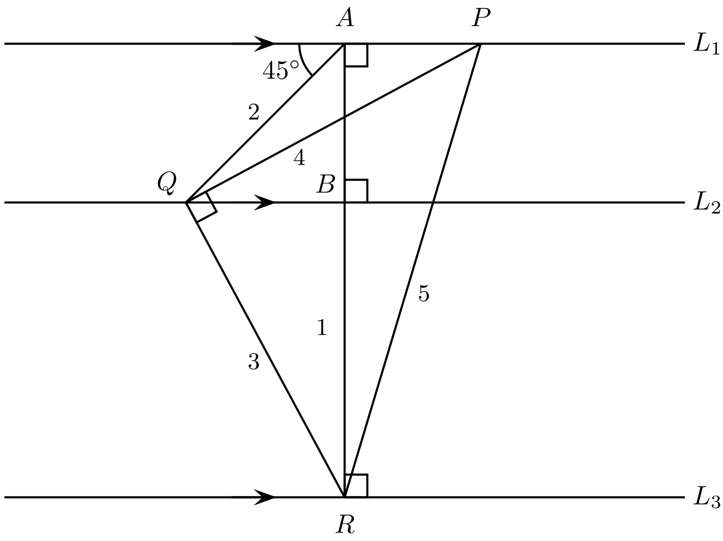


圖 83

證明如下：

$\angle PQR = 90° = \angle PAR$	（由作圖所得）
$PAQR$ 為一個圓內接四邊形	（同弓形上的圓周角的逆定理）
$\angle PRQ = 45°$	（圓內接四邊形的外角）
$\angle QPR = 45°$	（三角形內角和）

$\therefore \triangle PQR$ 是一個等腰直角三角形。

證明完畢。

註：以上方法較為簡單。

4.11 作已知底長、頂角及頂角之角平分綫的三角形

丘成桐教授於 2001 年播出的一輯數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」中提出以下用圓規直尺作三角形的問題 [6]，本人現有一解法。

如圖 84，給出以下條件，試作該三角形 ABC。
（1） $\angle A=\theta$，（2） $\angle A$ 的角平分綫長度為 t 及（3） $BC=a$。

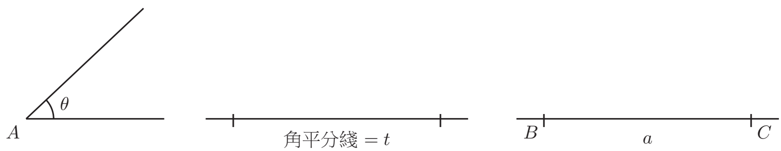


圖 84

作圖方法如下（圖 85）：

1. 作 $BC=a$。
2. 作 BC 的垂直平分綫 SET， E 為 BC 的中點。
3. 過 C 作一綫 CH 垂直於 BC。
4. 複製 $\angle HCO=\theta=\angle A$，使得 O 在 ST 上，連接 OB。
5. 以 O 為圓心， $OB=OC=r$ 為半徑作一圓，交 ST 於 D 及 F。
6. 連接 BF 及 BD。
7. 以 B 為圓心，$\frac{t}{2}$ 為半徑作一弧，交 BD 於 K。
8. 連接 FK。

[6]參考：數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」http://etv.edb.gov.hk/resource/749.doc

9. 以 K 為圓心， KB 為半徑作一弧，交 FK 的延長綫於 Q。

10. 以 F 為圓心， FQ 為半徑作一弧 AQ，交步驟 5 的圓於 A。

11. 連接 AB、 AC 及 AF，假設 FA 交 BC 於 M。

作圖完畢。

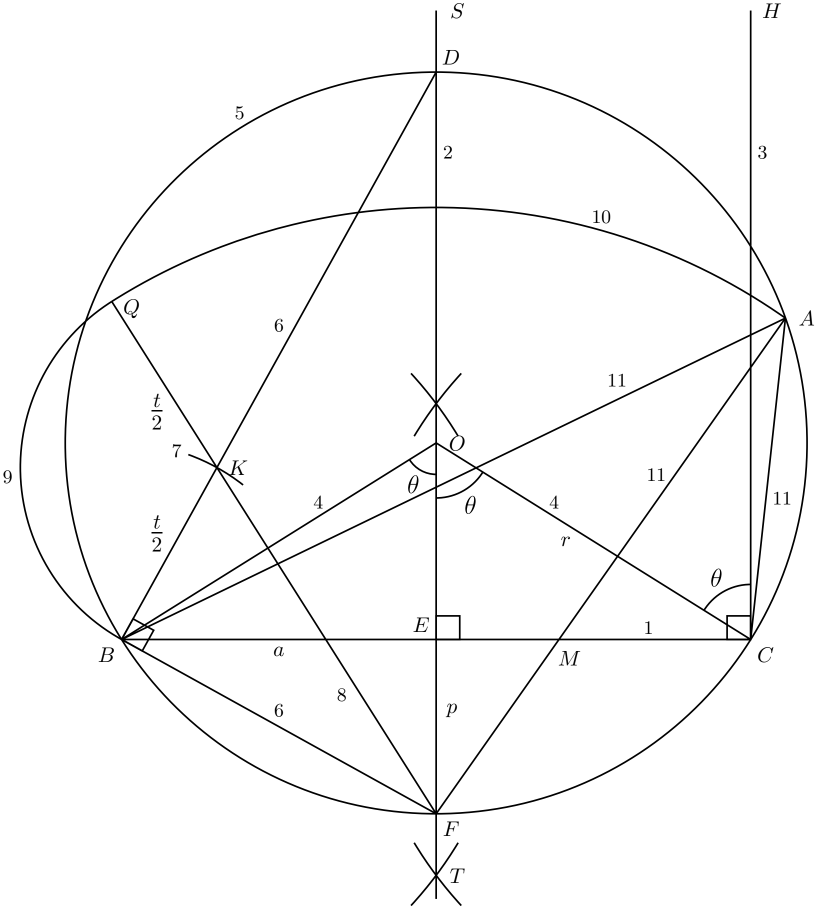


圖 85

證明如下：

$\angle DEC + \angle HCE = 180°$
$EO//CH$ （同傍內角互補）
$\therefore \angle EOC = \angle HCO = \theta$ （錯角， $EO//CH$）
$OE = OE$ （公共邊）
$\angle OEB = 90° = \angle OEC$ （直綫上的鄰角）
$BE = CE$ （E 為 BC 的中點）
$\triangle BOE \cong \triangle COE$ （S.A.S.）
$\therefore \angle BOE = \angle COE = \theta$ （全等三角形的對應角）
$OB = OC$ （全等三角形的對應邊）
DF 為步驟 5 的圓的直徑 $= 2r$。設 $EF = p$。
$\angle DBF = 90°$ （半圓上的圓周角）
$\triangle BEF \sim \triangle DBF$ （等角）
$\dfrac{BF}{p} = \dfrac{2r}{BF}$ （相似三角形的對應邊）
$BF^2 = 2rp \quad \cdots\cdots \quad (1)$

$BK = \dfrac{t}{2}$
$KQ = KB = \dfrac{t}{2}$
$FK^2 = BF^2 + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2$ （於 $\triangle BFK$ 應用畢氏定理）
$FK = \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2}$ （由 (1) 式得知）
$FQ = \dfrac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2} \quad \cdots\cdots \quad (2)$
$\angle BAC = \theta$ （圓心角兩倍於圓周角）
$\triangle BEF \cong \triangle CEF$ （S.A.S.）
$\therefore BF = CF$ （全等三角形的對應邊）
$\angle BAF = \angle CAF$ （等弦對等角）
$\therefore AF$ 是 $\angle BAC$ 的角平分綫，且交 BC 於 M。
$FA = FQ = \dfrac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2}$ （由 (2) 式得知）

$$
\begin{aligned}
MA \times MF &= MB \times MC && \text{（相交弦定理）}\\
&= (BE + ME)(CE\text{–}ME)\\
&= BE{\cdot}CE\text{–}ME^2\\
&= DE{\cdot}p - ME^2 \quad \cdots\cdots \quad (3) && \text{（相交弦定理）}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
MF \times AF &= MF \times (AM + MF)\\
&= MF \times AM + MF^2\\
&= DE{\cdot}p - ME^2 + MF^2 && \text{（由 (3) 式所得）}\\
&= DE{\cdot}p + p^2 && \text{（於 } \triangle EFM \text{ 應用畢氏定理）}\\
&= (DE + p)p\\
&= 2rp
\end{aligned}
$$

$$MF\cdot\left[\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}\right] = 2rp \qquad \text{（由 (2) 式所得）}$$

$$MF = \frac{2rp}{\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \frac{2rp}{\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{t}{2} - \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}{\frac{t}{2} - \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2rp\left[\frac{t}{2} - \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}\right]}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 2rp - \left(\frac{t}{2}\right)^2} = -\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$AM = AF - MF = \frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2} - \left[-\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}\right] = t$$

證明完畢。

[編者按：本題的重點在於找出 AM，其長度等於 t。

設 $FM = y$， $MA = t$。

考慮 $\triangle FME \sim \triangle FDA$。

$\therefore \dfrac{FE}{FM} = \dfrac{FA}{FD}$

$\dfrac{p}{y} = \dfrac{y + t}{2r}$

$y^2 + ty - 2rp = 0$

$y = -\frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$ 或 $-\frac{t}{2} - \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$（捨去）

$y + t = \frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$

從作圖可證明 $BF^2 = 2rp$。

作直角三角形 $\triangle BFK$，可得 $FK = \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$

$\therefore FA = FQ = \frac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\frac{t}{2}\right)^2} = y + t$]

第 5 章　圓

5.1　外接圓

如圖 86， A、 B 及 C 為三定點且不共綫。試作一圓經過該三點。[1]

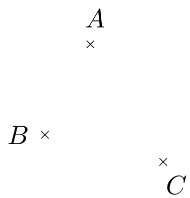


圖 86

我們只須找出其中兩條垂直平分綫的交點為圓心，便可作其外接圓了。

作圖方法如下（圖 87）：

1. 連接 AB、 AC 及 BC。
2. 作 AB 的垂直平分綫 PQ， M 為 AB 的中點。
3. 作 AC 的垂直平分綫 RS， N 為 AC 的中點。
   兩垂直平分綫相交於 O。

[1]香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 1 題

4. 以 O 為圓心，OB 為半徑作一圓，該圓便是外接圓。

作圖完畢。

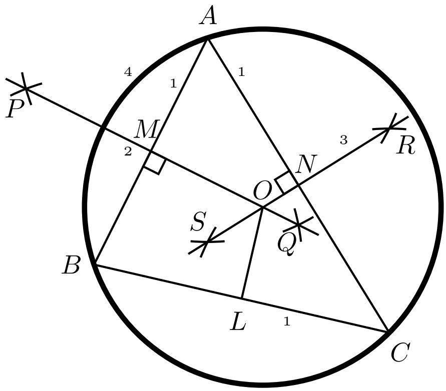


圖 87

證明如下：

$\triangle AOM \cong \triangle BOM$	（S.A.S.）
$\triangle AON \cong \triangle CON$	（S.A.S.）
$OB = OA = OC$	（全等三角形對的應邊）

$\therefore$ 該圓經過 A、B 及 C。

證明完畢。

延伸：可進一步證明三條垂直平分綫必然共點（concurrent at a point）。

證明如下：

設 L 為 BC 的中點，連接 OL。

$\triangle BOL \cong \triangle COL$	（S.S.S.）
$\angle BLO = \angle CLO$	（全等三角形的對應角）
$\angle BLO + \angle CLO = 180°$	（直綫上的鄰角）

$\therefore \angle BLO = \angle CLO = 90°$

$\therefore OL$ 為 BC 的垂直平分綫。

$\therefore$ 三條垂直平分綫必然共點。證明完畢。

5.2 作三角形的內心和旁心

在已知三角形中，試作出一點使它與該三角形各邊的距離相等。[2]

首先，已給出 $\angle ABC$（圖 88），我們找出一點 D 的軌跡，使得 D 至 AB 和 CB 的距離相等。

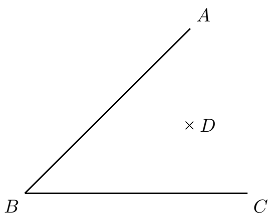


圖 88

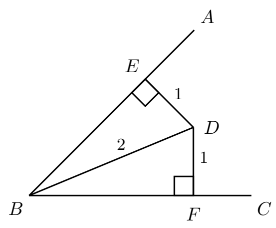


圖 89

1. 過 D 作垂直綫至 AB 和 BC， E 及 F 為垂足（圖 89）。

2. 連接 BD，則

$BD = BD$	（公共邊）
$\angle BED = \angle BFD = 90°$	（由作圖所得）
$DE = DF$	（已知 D 與 AB 及 BC 等距）
$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDF$	（R.H.S.）
$\angle DBE = \angle DBF$	（全等三角形的對應角）

$\therefore D$ 在 $\angle ABC$ 的角平分綫上。

$\therefore$ 若一點 P 與該三角形各邊的距離相等，則 P 必定在該三角形的三條角平分綫的交點。（即 $\triangle ABC$ 的內心）

[2]香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 1 題

作圖方法如下（圖 90）：

1. 作 $\angle ABC$ 的角平分綫。
2. 作 $\angle ACB$ 的角平分綫。 P 為兩條角平分綫的交點。
3. 連接 AP。
4. 分別過 P 作垂直綫至 BC、 AC 及 AB，R、 S、 T 為對應的垂足。

作圖完畢。

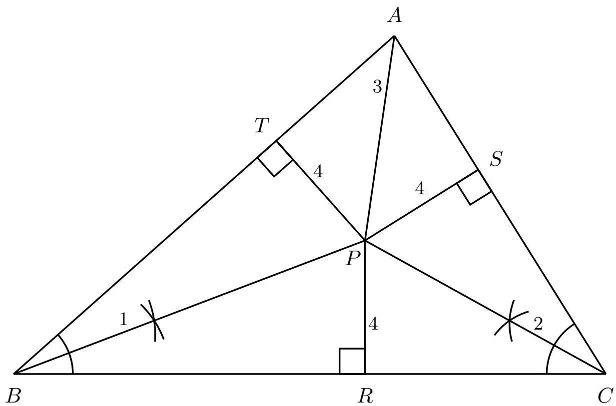


圖 90

證明如下：

$\triangle BPR \cong \triangle BPT$	（A.A.S.）
$\triangle CPR \cong \triangle CPS$	（A.A.S.）
$PT = PR = PS$	（全等三角形的對應邊）

證明完畢。

若以 P 為圓心， PR 為半徑作一圓，此圓內切於三角形的三邊，稱為內切圓（inscribed circle）（圖 91）。

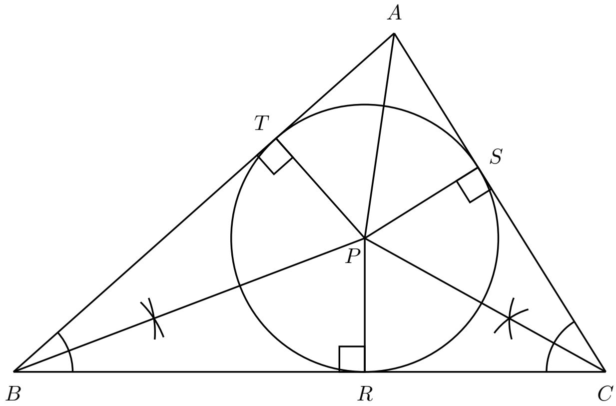


圖 91

延伸：　可進一步證明三條角平分綫必然共點（concurrent at a point）。

證明：　$\triangle APT \cong \triangle APS$　（R.H.S.）

$\angle PAT = \angle PAS$　（全等三角形的對應角）

$\therefore AP$ 為 $\angle BAC$ 是角平分綫。

$\therefore$ 三條角平分綫必然共點。

註一：　$\because$ 三條角平分綫必然共點（concurrent at a point）

$\therefore$ 我們只須找出其中兩條角平分綫的交點，便可找出三角形的內心。

註二：　三角形有三個旁心，每個旁心皆與每條邊等距。現在，只作其中一個旁心，作為示範。

作圖方法如下（圖 92）：

1. 將 AB 延長至 S，將 AC 延長至 T。
2. 分別作 $\angle ABC$ 的外角平分綫和 $\angle ACB$ 的外角平分綫。兩條外角平分綫相交於 I。

3. 過 I，分別作綫段 IP、 IQ、 IR 垂直於 BC、 AC 及 AB。 P、 Q 及 R 為對應的垂足。

4. 連接 AI。 AI 為 $\angle BAC$ 的內角平分綫。

作圖完畢。

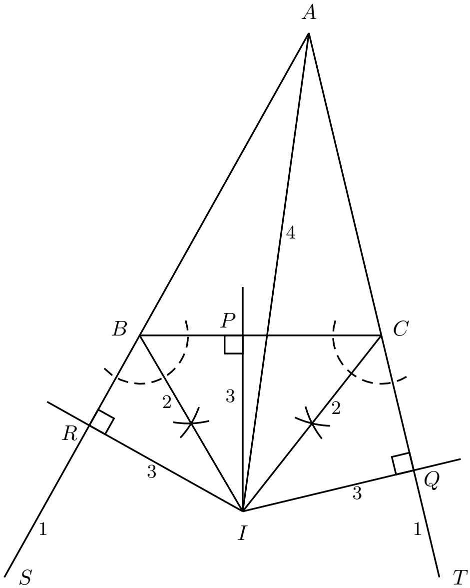


圖 92

證明如下：

$\triangle IBP \cong \triangle IBR$	（A.A.S.）
$\triangle ICP \cong \triangle ICQ$	（A.A.S.）
$\therefore IP = IQ = IR$	（全等三角形的對應邊）
$\therefore I$ 與 AB， BC 及 AC 等距。	
$\triangle IAR \cong \triangle IAQ$	（R.H.S.）
$\angle IAR = \angle IAQ$	（全等三角形的對應角）
$\therefore IA$ 為 $\angle BAC$ 的內角平分綫	

三角形的兩條外角平分綫和一條內角平分綫共點。

證明完畢。

註：若以 I 為圓心， IP 為半徑作一圓，此圓旁切於三角形的三邊，稱為旁切圓（escribed circle or ex-circle）（圖 93）。

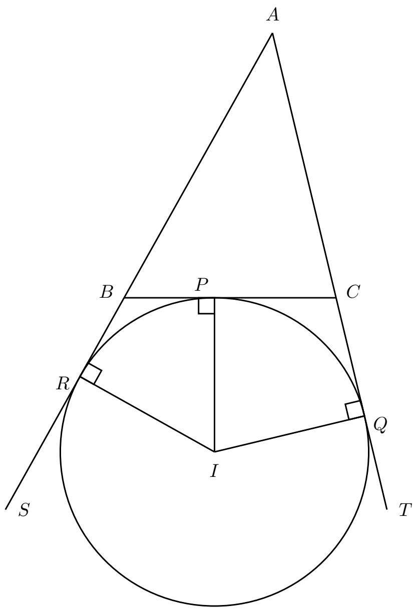


圖 93

5.3　由外點引圓的切綫

如圖 94，過一圓外定點 P 作切綫。[3]

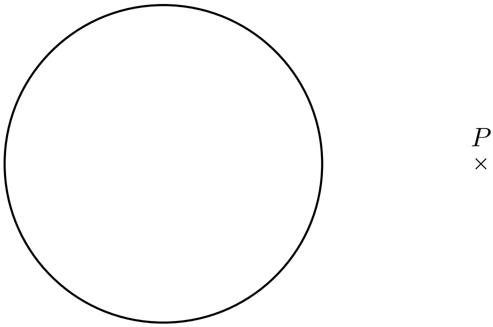


圖 94

作圖方法如下：

方法一（圖 95 及圖 96）：

1. 在圓上作兩條不平行的弦綫 AB 和 CD。
2. 設 AB 和 CD 的垂直平分綫相交於 O， O 為該圓的圓心。

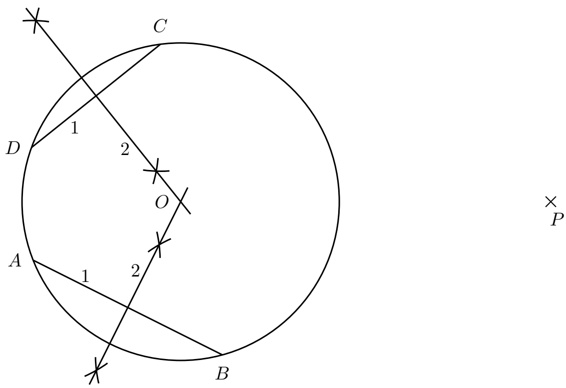


圖 95

[3]香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 3 題

3. 連接 OP。

4. 作 OP 的垂直平分綫， K 為 OP 的中點。

5. 以 K 為圓心， KO 為半徑作一圓，交已知圓於 M 和 N。

6. 連接 OM、 ON、 MP 及 NP。

作圖完畢。

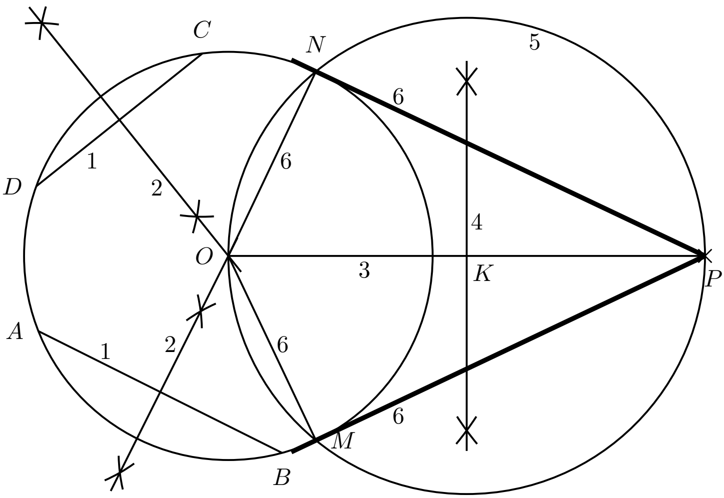


圖 96

證明如下：

$\angle OMP = 90° = \angle ONP$ （半圓上的圓周角）

PM、 PN 便是切綫 （切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

方法二（圖 97）：

1. 過 P 點任意作一綫段交已知圓於 Q、 R。 R 離 P 較遠一端。
2. 利用 PR 的垂直平分綫，找出 PR 的中點 O。
3. 以 O 為圓心， OP 為半徑作一半圓。
4. 過 Q 點（Q 在 P 和 R 之間），作一綫段 QT 垂直於 PR，交步驟 3 的半圓於 T。
5. 連接 PT。
6. 連接 TR。
7. 以 P 為圓心， PT 為半徑作一弧，交已知圓於 M 及 N。
8. 連接 PM、 PN。

作圖完畢。

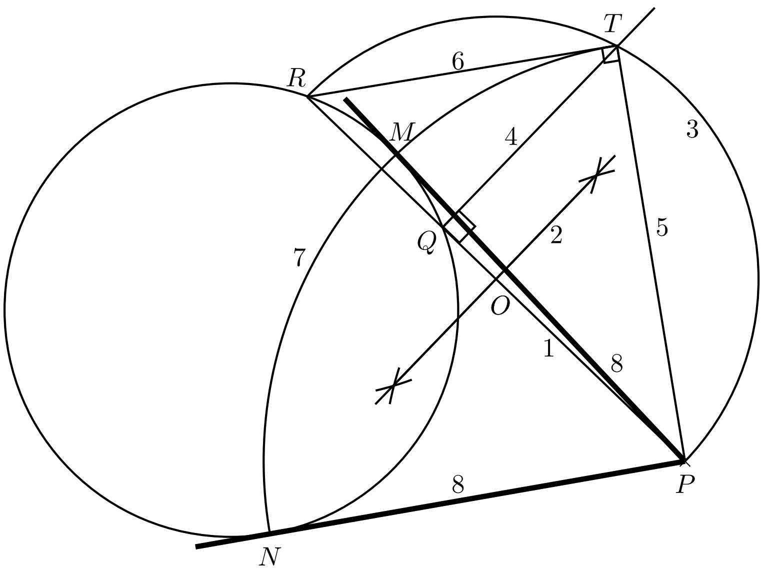


圖 97

證明如下：

$\angle PTR = 90^\circ$	（半圓上的圓周角）
$\triangle PQT \sim \triangle PTR$	（等角）
$\dfrac{PQ}{PT} = \dfrac{PT}{PR}$	（相似三角形的對應邊）
$\therefore PQ \cdot PR = PT^2$	
由步驟 7， $PQ \cdot PR = PT^2 = PM^2 = PN^2$	
$\therefore PM$ 及 PN 便是切綫	（相交弦定理的逆定理）

證明完畢。

5.4 作外公切綫

已給兩個圓 C_1 和 C_2，圓心和半徑分別為 A、 B 和 R、 r；且 $AB > R+r$ 及 $R > r$，作兩圓的外公切綫。

作圖方法如下（圖 98）：

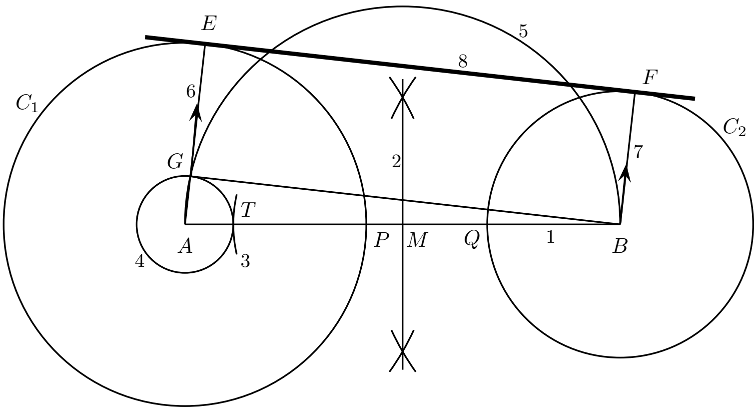


圖 98

1. 連接 AB，分別交圓 C_1 和圓 C_2 於 P 和 Q； $AP = R$， $BQ = r$。
2. 作 AB 的垂直平分綫，找出 AB 的中點 M； $AM = MB$。
3. 以 P 為圓心， BQ 為半徑作一弧，交 AP 於 T； $PT = BQ = r$，則 $AT = AP–PT = R - r$。
4. 以 A 為圓心， AT 為半徑作一圓。
5. 以 M 為圓心， $MA = MB$ 為半徑作一半圓，交步驟 4 的圓於 G；$AG = AT = R - r$。
6. 連接 AG，其延長綫交圓 C_1 於 E； $GE = AE - AG = r$。
7. 過 B 作一綫段 BF 平行於 AGE，交圓 C_2 於 F。

8. 連接 EF，則 EF 便是兩圓的外公切綫了。

作圖完畢。

證明如下：

$GE = r = BF$	（由步驟 6 所得）
$BFEG$ 是一個平行四邊形	（對邊相等且平行）
$\angle AGB = 90^\circ$	（半圓上的圓周角）
$\therefore BFEG$ 為一個長方形	
$\angle GEF = \angle BFE = 90^\circ$	（長方形的性質）
$\therefore EF$ 是兩圓的外公切綫	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

註：除了 EF 之外，還有另一條外公切綫，作法由讀者自行推敲。

討論一：　若 $0 < AB < R–r$，則圓 C_2 在圓 C_1 內，而沒有公切綫（圖 99）。

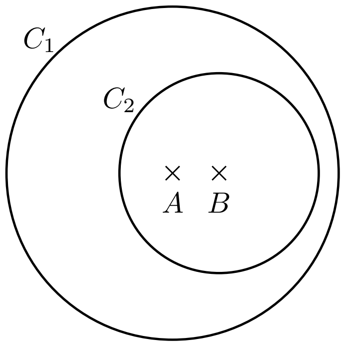


圖 99

討論二：　若 $0 < AB = R–r$，則圓 C_2 內切圓 C_1 於 P，過 P 作一直綫垂直於 AB，這便是公切綫了（圖 100）。

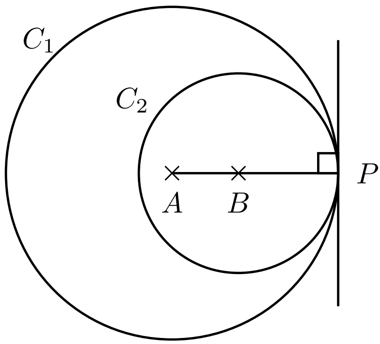


圖 100

討論三： 若 $0 < R–r < AB < R + r$，兩圓相交；作圖步驟相同（圖 101）。

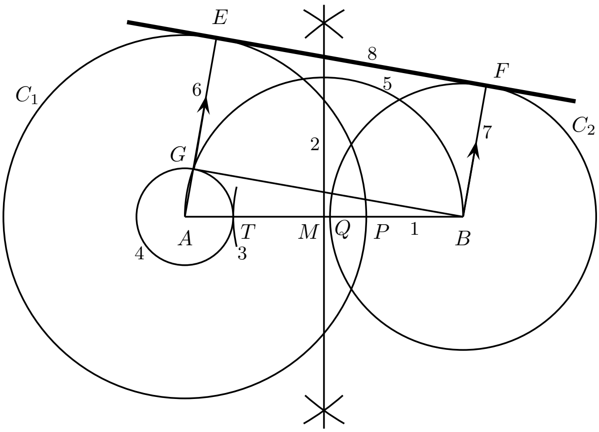


圖 101

討論四： 若 $AB = R + r$，兩圓外切於一點 P；作圖步驟相同（圖 102）。

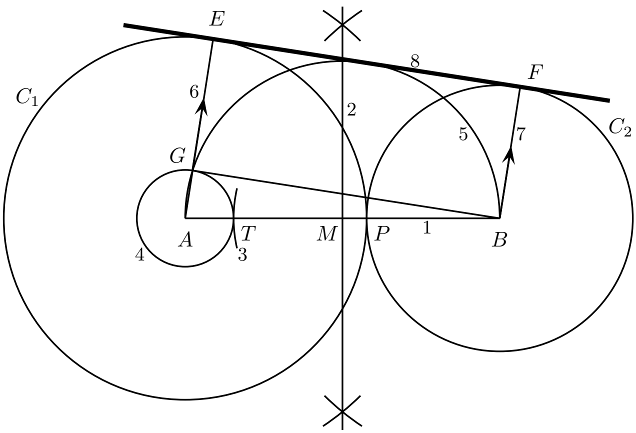


圖 102

討論五： 若 $AB > 0$ 及 $R = r$；作圖方法如下（圖 103）：

1. 連接 AB。
2. 過 A 作綫段 PAS 垂直於 AB，且交圓 C_1 於 P、 S。
3. 過 B 作綫段 QBT 垂直於 AB，且交圓 C_2 於 Q、 T。（P、 Q 在同一方， S、 T 在另一方。）
4. 連接 PQ。
5. 連接 ST。

作圖完畢。

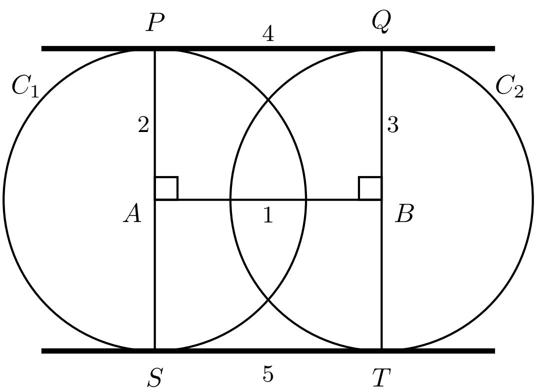


圖 103

證明如下：

$AP = BQ$ 及 $AS = BT$	（等圓半徑）
$\angle BAP = 90^\circ = \angle ABQ$	（由作圖所得）
$PAS//QBT$	（同傍內角互補）
$\therefore PQBA$ 及 $ABTS$ 為平行四邊形。	（對邊平行且相等）
$\because \angle PAB = 90^\circ$，$\angle SAB = 90^\circ$	（由作圖所得）
$\therefore PQBA$ 及 $ABTS$ 為長方形。	
$\angle APQ = 90^\circ = \angle BQP = \angle AST = \angle BTS$	（長方形的性質）
$\therefore PQ$ 及 ST 為該兩圓的公切綫。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

5.5 作內公切綫

已給兩個圓 C_1 和 C_2，圓心和半徑分別為 A、B 和 R、r；且 $AB > R + r$，作內公切綫。

作圖方法如下（圖 104）：

1. 連接 AB，分別交圓 C_1 及圓 C_2 於 P 和 Q。$AP = R$，$BQ = r$。
2. 作 AB 的垂直平分綫，找出 AB 的中點 M，$AM = MB$。
3. 以 P 為圓心，BQ 為半徑作一弧，交 PB 於 T；$PT = BQ = r$，則 $AT = AP + PT = R + r$。
4. 以 A 為圓心，AT 為半徑作一圓。
5. 以 M 為圓心，$MA = MB$ 為半徑作一半圓，交步驟 4 的圓於 G，$AG = AT = R + r$。
6. 連接 AG，交圓 C_1 於 E，$EG = AG - AE = r$。
7. 過 B 作一綫段 BF 平行於 GEA，交圓 C_2 於 F。
8. 連接 EF，則 EF 便是兩圓的內公切綫了。

作圖完畢。

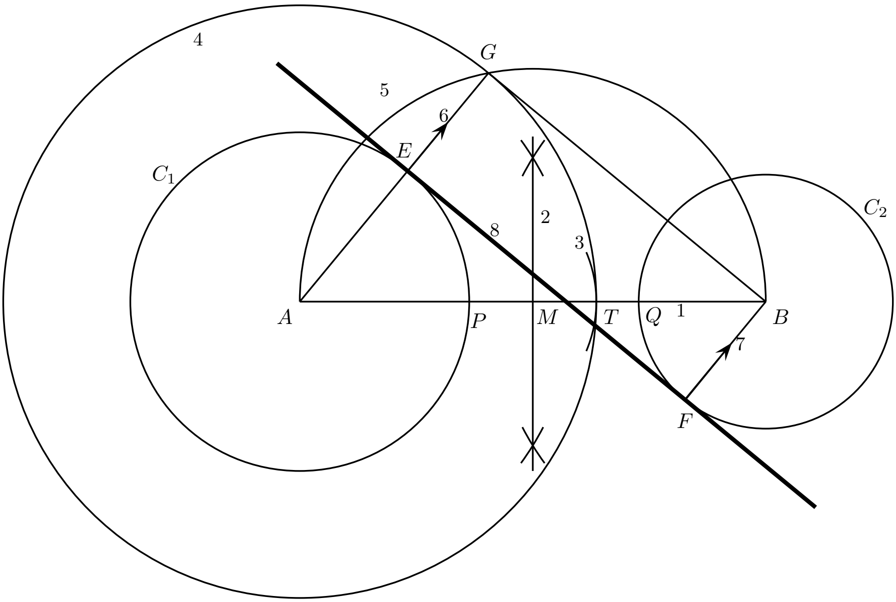


圖 104

證明如下：

$EG = FB = r$	（由步驟 6 所得）
$\therefore EFBG$ 為一個平行四邊形	（對邊平行且相等）
$\angle AGB = 90°$	（半圓上的圓周角）
$\therefore EFBG$ 為一個長方形	
$\angle GEF = \angle BFE = 90°$	（長方形的性質）
$\therefore EF$ 是兩圓的內公切綫	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

註一：　除了 EF 之外，還有另一條內公切綫，作法由讀者自行推敲。

註二：　若兩圓互相外切於 P 點，過 P 點作綫段垂直於 AB，這便是內公切綫了（圖 105）。

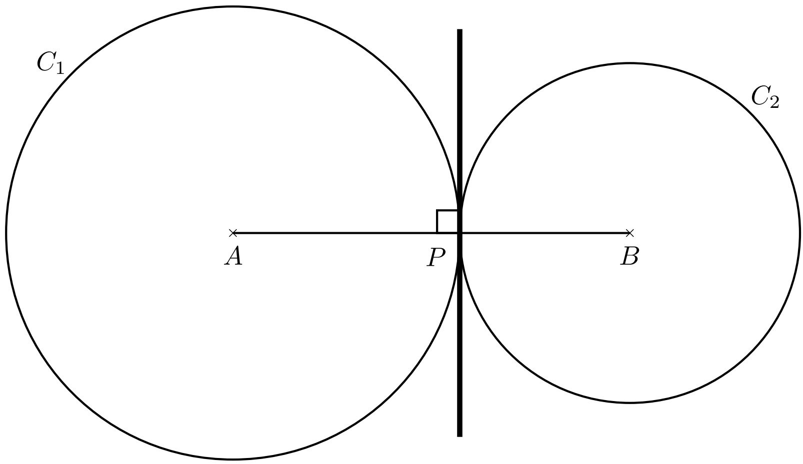


圖 105

註三：　若兩圓相交，或一圓縮入另一圓內，則沒有內公切綫。

5.6 只用圓規將圓分為四等份

已給一個圓，圓心 O，只用圓規將圓分成四等份。

原理： 如圖 106， O 為圓心。假設在圓上有 4 點 A、 B、 C、 D，將此圓均分成四等份。

$\angle AOB = 90^\circ$ （等弧對等角）

設 $OA = r = OB$，則

$AB = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$ （畢氏定理）

同理， $BC = CD = DA = \sqrt{2}r$。

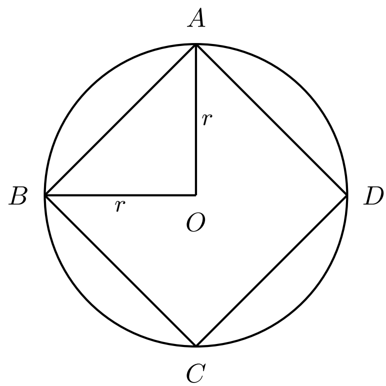


圖 106

作圖方法如下：

1. 在圓周上任意一點 A，以 A 為圓心， AO 為半徑作一弧，交圓於 E。以 E 為圓心， EO 為半徑作一弧，交圓於 F。以 F 為圓心， FO 為半徑作一弧，交圓於 C（圖 107）。

   $\triangle AOE$、 $\triangle EOF$、 $\triangle FOC$ 為等邊三角形。

   $\angle AOE = \angle EOF = \angle FOC = 60^\circ$。

   $\therefore \angle AOC = 180^\circ$

   AC 為直徑。

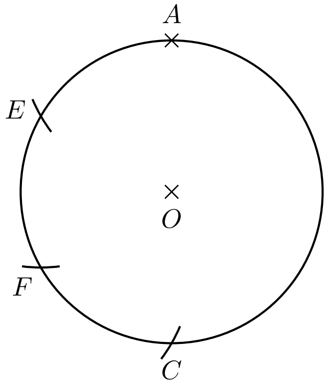


圖 107

2. 以 A 為圓心， AC 為半徑作一弧，以 C 為圓心， CA 為半徑作一弧，此兩弧相交於 G（圖 108）。
$\triangle ACG$ 為一個等邊三角形，邊長 $= 2r$。

$\because AO = OC = r$
$\therefore \triangle AOG \cong \triangle COG$　　（S.S.S.）
$\angle AOG = \angle COG = 90^\circ$　　（全等三角形的對應角）
$OG = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$　　（畢氏定理）

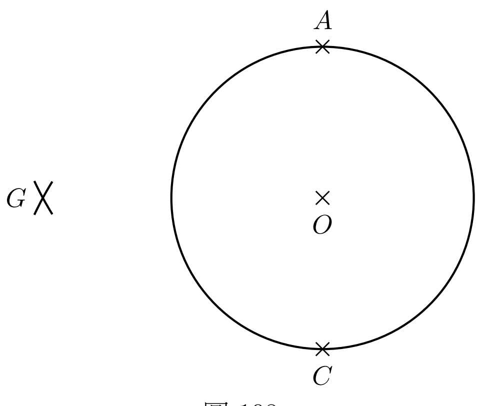


圖 108

3. 以 A 為圓心， OG 為半徑作一弧，以 C 為圓心， OG 為半徑作一弧，此兩弧相交於 H（圖 109）。
$OH = \sqrt{\left(\sqrt{3}r\right)^2 - r^2} = \sqrt{2}r$ （畢氏定理）

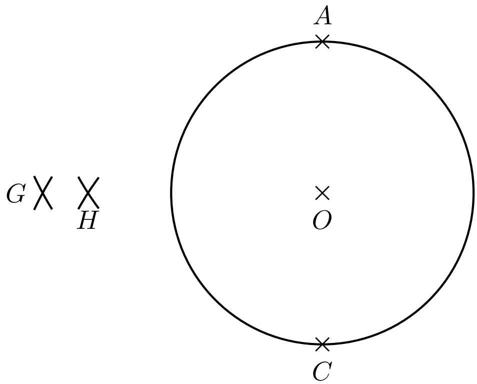


圖 109

4. 以 A 為圓心， OH 為半徑作一弧，交圓於 B、 D（圖 110）。
$AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}r$
A、 B、 C、 D，將此圓均分成四等份。

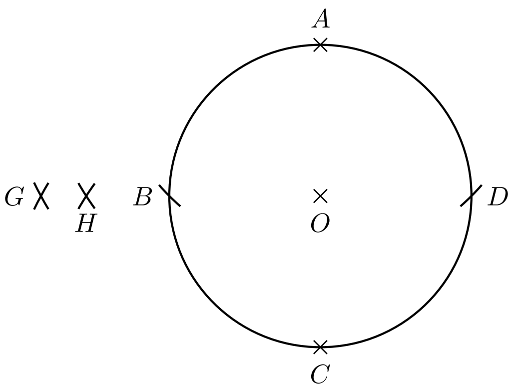


圖 110

5.7 過圓內定點作符合特定比的弦綫

已給一點 M 在一圓內，以尺規作一弦綫 AMB，使得 AM:MB=2:3。

作圖方法如下：

方法一（圖 111 及圖 112）：

1. 設 O 為圓心，連接 OM，作弦綫 $CMD \perp OM$。

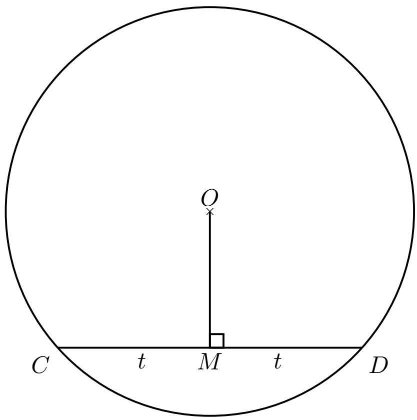


圖 111

2. 作等邊三角形 CDE。
3. 連接 OE。
4. 以 M 為圓心， ME 為半徑作一弧，交 CD 之延長綫於 F。
5. 連接 EF。作 EF 的垂直平分綫得中點 K，連接 MK。
6. 以 M 為圓心， MK 為半徑作一弧，交圓於 B。

7. 連接 BM，其延長綫交圓於 A。

作圖完畢。

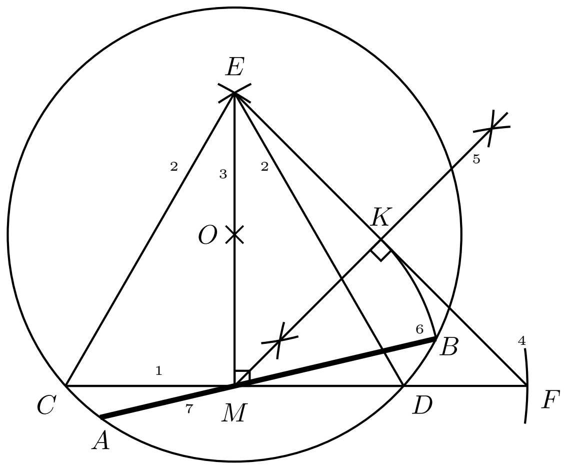


圖 112

證明如下：

設 $CD = DE = CE = 2t$。

$CM = MD = t$ （圓心至弦的垂綫平分弦）

E、O、M 共綫 （弦的垂直平分綫必定經過圓心）

$EM = \sqrt{(2t)^2 - t^2} = \sqrt{3}t$ （畢氏定理）

$MF = ME = \sqrt{3}t$ （由作圖所得）

$\triangle EMF$ 為一個直角等腰三角形

$EF = \sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2 + \left(\sqrt{3}t\right)^2} = \sqrt{6}t$ （畢氏定理）

$EK = \dfrac{\sqrt{6}t}{2}$

$$MK = \sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}t}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}t}{2}$$ （畢氏定理）

$MB = \dfrac{\sqrt{6}t}{2}$

$AM \times MB = CM \times MD$ （相交弦定理）

$AM \times \dfrac{\sqrt{6}t}{2} = t^2$

$AM = \dfrac{\sqrt{6}t}{3}$

$\therefore AM : MB = \dfrac{\sqrt{6}t}{3} : \dfrac{\sqrt{6}t}{2} = 2 : 3$

證明完畢。

註：若 M 與 O 距離太接近（$MK > OM+$ 半徑（OB'）），有可能未能作弦綫 AMB（圖 113）。

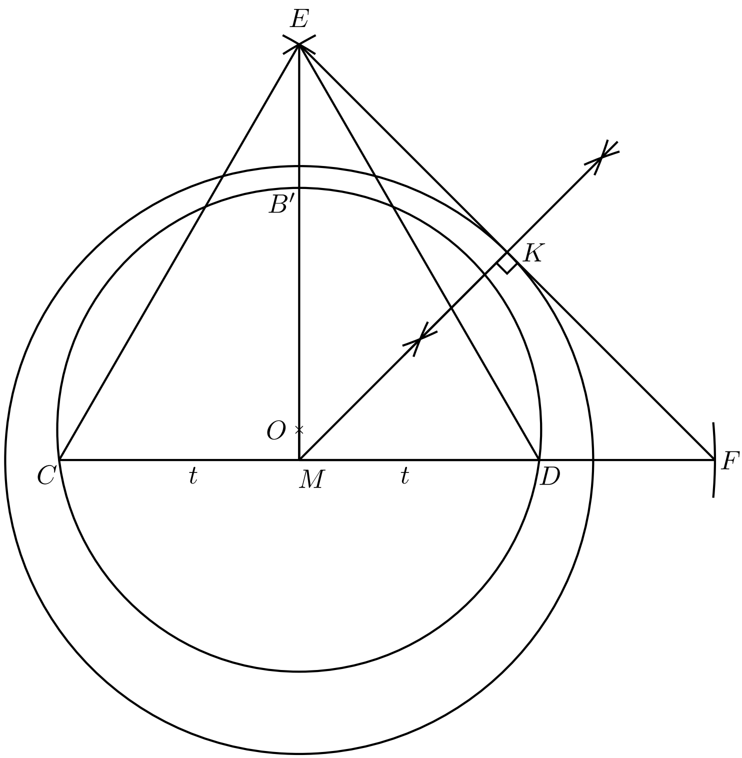


圖 113

我們希望找出極限點 M。

假設 EM 交圓於 B， BM 的延長綫交已知圓於 A。

以 M 為圓心， MK 為半徑的圓弧與已知圓相切於 B。

一如上文分析， $AM : MB = 2 : 3$。

極限點 M 滿足 $MK = MB$（圖 114）。

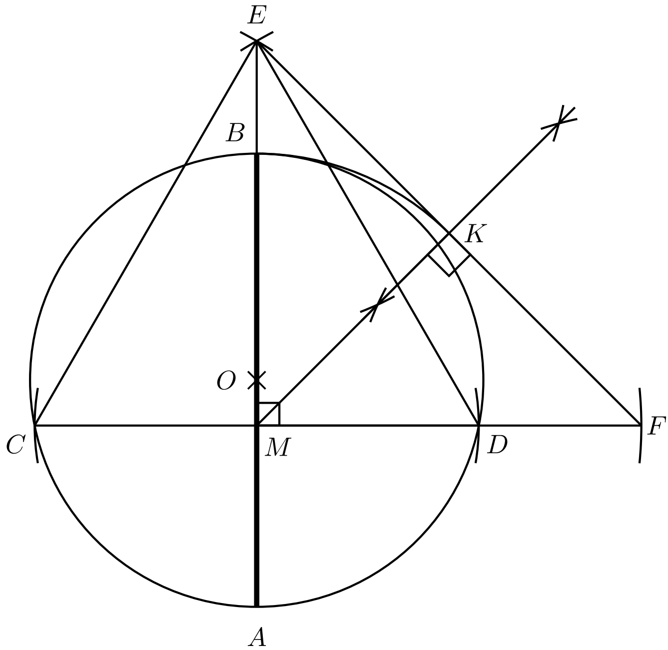


圖 114

$\dfrac{\sqrt{6}t}{2} = MB = OM + r$，其中 r 為已知圓的半徑。

$\dfrac{\sqrt{6}t}{2} = \sqrt{r^2 - t^2} + r$

$\dfrac{\sqrt{6}t}{2} - r = \sqrt{r^2 - t^2}$

$\dfrac{3t^2}{2} + r^2 - \sqrt{6}tr = r^2 - t^2$

$\dfrac{5t^2}{2} = \sqrt{6}tr$

$t = \dfrac{2\sqrt{6}r}{5}$

$OM = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{6}r}{5}\right)^2} = \dfrac{r}{5}$

換句話說，若 $OM < \dfrac{r}{5}$，則未能作弦綫。

方法二（圖 115）：

1. 設 O 為圓心，將 OM 延長至 P，使得 $OM : MP = 1 : 2$，設 $OM = x$， $MP = 2x$。
2. 以 P 為圓心， PM 為半徑作一圓，交已知的圓於 A。
3. 連接 AM，其延長綫交已知的圓於 B。

作圖完畢。

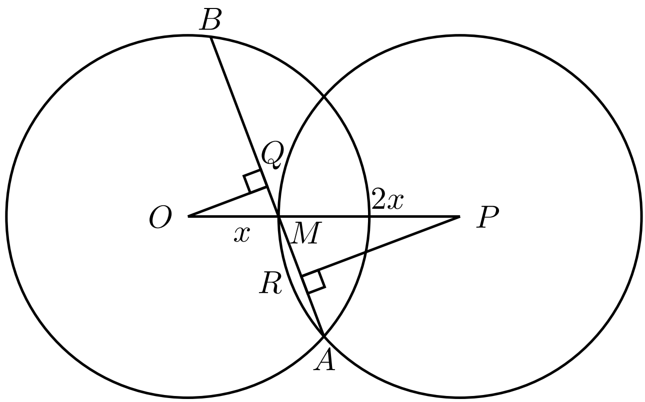


圖 115

證明如下：

設 Q 和 R 分別為 O 及 P 至 AB 的垂足。

$\triangle OQM \sim \triangle PRM$ （等角）

設 $QM = t$， $MR = 2t$ （相似三角形的對應邊）

$AR = MR = 2t$ （圓心至弦的垂綫平分弦）

$BQ = AQ = t + 2t + 2t = 5t$ （圓心至弦的垂綫平分弦）

$AM : MB = (2t + 2t) : (5t + t) = 2 : 3$

證明完畢。

註一：　相比之下，這方法更簡單和直接。
我們可以用這方法作任意弦綫比例 $m:n$，其中 m、 n 為正整數，詳情由讀者自行推敲。

註二：　當 M 與 O 距離太接近，同樣有可能未能作弦綫 AMB（圖 116）。

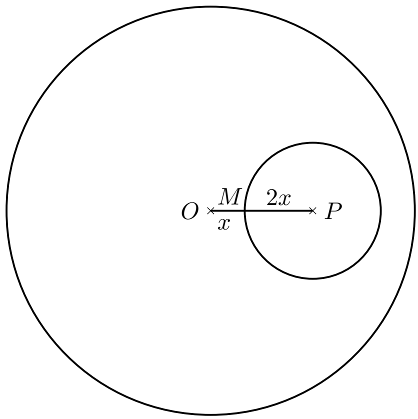


圖 116

如圖 116，以 P 為圓心的小圓未必能與已知的大圓相交。
在極限點，小圓內切大圓於 A（圖 117）。

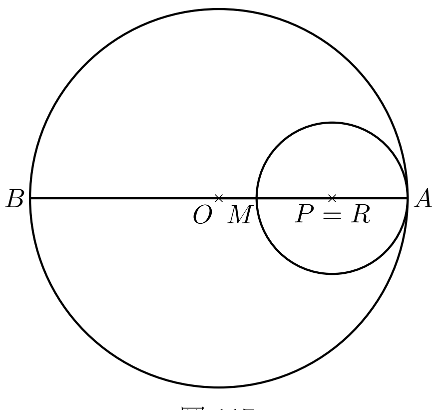


圖 117

此時， $OA = x + 2x + 2x = 5x = r =$ 已知的大圓的半徑，即 $x = \dfrac{r}{5}$。換句話說，若 $OM < \dfrac{r}{5}$，則未能作弦綫。

5.8 作根軸 (Radical axis)

5.8.1 點對圓的冪（Power of a point with respect to a circle）

已給一個固定圓 C，圓心 O，半徑為 r，一可動點 Q 至這個圓 C 的冪定義為 $P_{QO} = QO^2 – r^2$。

P_{QO} 為一記號， QO 為有向距離。

情況一（圖 118）：
若 Q 在圓以外，由外點引切綫，切圓 C_1 於 S。
$P_{QO} = QO^2 – r^2 = QS^2$（切綫 ⊥ 半徑，畢氏定理）
$\therefore P_{QO}$ 為外點引切綫至切點長度的平方。

情況二（圖 119）：
若 Q 在圓以內， $P_{QO} = QO^2 – r^2 < 0$

情況三：
若 Q 在圓上， $P_{QO} = QO^2 – r^2 = 0$

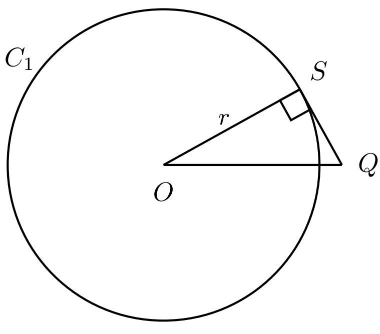


圖 118

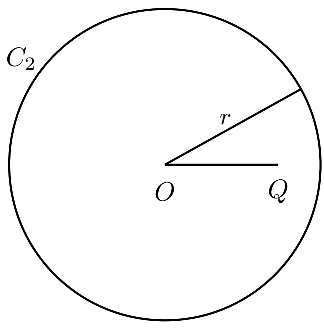


圖 119

5.8.2 根軸（Radial axis）

已給兩個圓，圓心分別為 A 及 B，半徑分別為 a 和 b。若一可動點 Q 至這兩個圓的冪相同，即 $P_{QA} = P_{QB}$。 Q 的軌跡稱為根軸（Radical axis）。
由外點 Q 引切綫至兩圓，分別切該兩圓於 C 及 D。由定義所得，兩條切綫的長度相等，即 $QC = QD$。

情況一：
兩個圓沒有相交，且 $AB > a + b$（圖 120）。
過 Q 作一綫垂直於 AB，且交 AB 於 O。

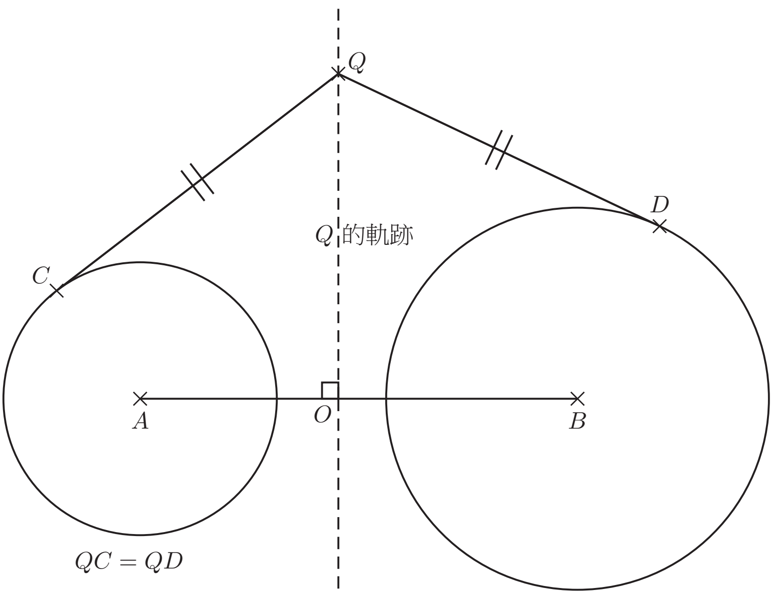


圖 120

設 $AB = c$。

$\because P_{QA} = P_{QB}$

$$\begin{aligned}
\therefore QA^2 - a^2 &= QB^2 - b^2 \\
QO^2 + AO^2 - a^2 &= QO^2 + OB^2 - b^2 \\
AO^2 - OB^2 &= a^2 - b^2 \ \cdots\cdots \ (1) \\
(AO + OB)\,(AO - OB) &= a^2 - b^2 \\
c\,(AO - OB) &= a^2 - b^2 \\
AO - OB &= \frac{a^2 - b^2}{c}
\end{aligned}$$

$\because OB = AB - AO = c - AO$

$$\begin{aligned}
\therefore AO - (c - AO) &= \frac{a^2 - b^2}{c} \\
2AO &= \frac{a^2 - b^2}{c} + c \\
AO &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}
\end{aligned}$$

因此， AO 為一常數，與 Q 的位置無關。

$$\begin{aligned}
P_{OA} – P_{OB} &= (OA^2 - a^2) - (OB^2 - b^2) \\
&= (AO + OB)(AO – OB) – a^2 + b^2 \\
&= 0 \quad \text{由 (1) 式得知}
\end{aligned}$$

$\therefore Q$ 的軌跡經過 O。

$\therefore Q$ 的軌跡為一直綫，經過 O，且與 AB 垂直。

情況二：
兩圓相交於 S 和 T（圖 121）。

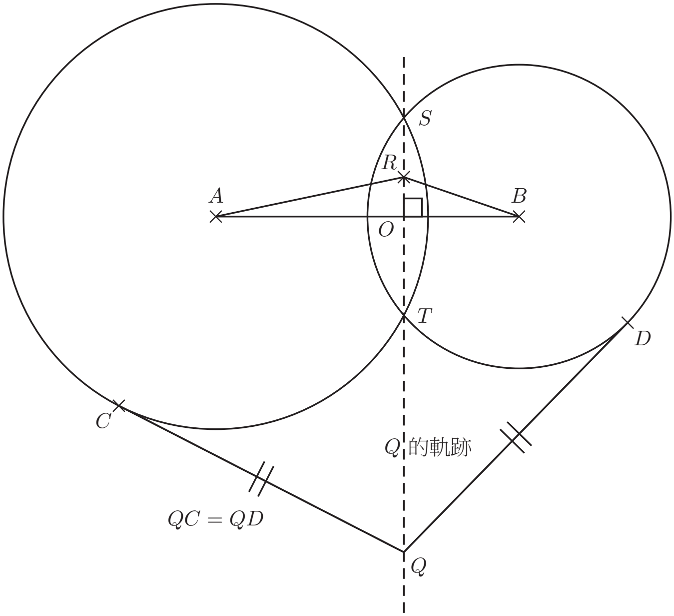


圖 121

明顯地， $P_{SA} = SA^2 - a^2 = 0 = SB^2 - b^2 = P_{SB}$
$\therefore$ 該兩圓的根軸經過 S 和 T。
若 R 在直綫 ST 上任意一點， $P_{RA} = RA^2 - a^2$; $P_{RB} = RB^2 - b^2$

$$P_{RA} - P_{RB} = \left(AO^2 + OR^2\right) - \left(OB^2 + OR^2\right) - a^2 + b^2$$
$$= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 = 0 \text{（由 (1) 式所得）}$$

一如情況一的分析， Q 的軌跡為一直綫，經過 ST，且與 AB 垂直。

情況三：
兩圓相切（內切或外切）於 S（圖 122 及圖 123）。
Q 的軌跡為該兩圓的公切綫。

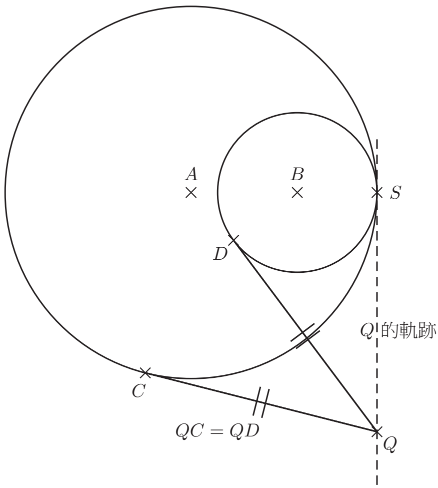


圖 122

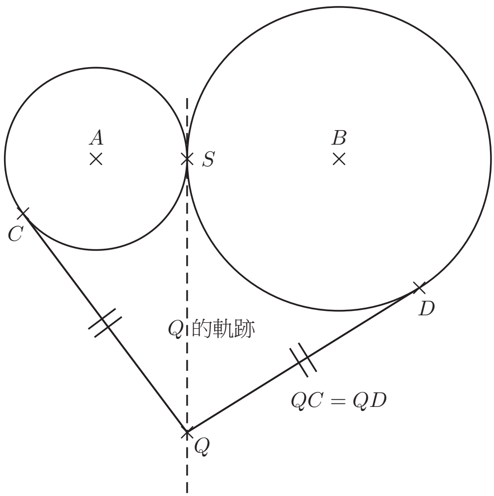


圖 123

情況四：

兩個圓沒有相交，且 $0 < AB < a–b$（圖 124）。

Q 的軌跡為一直綫，經過 O，且與 AB 垂直。

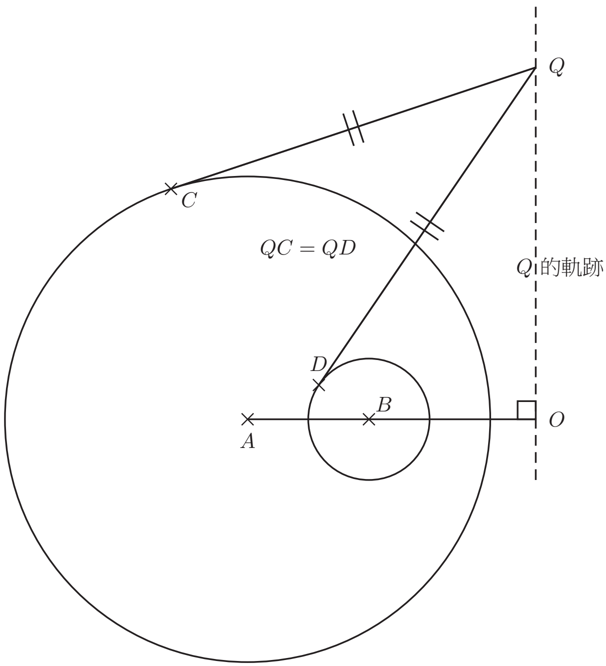


圖 124

5.8.3 以尺規作兩圓的根軸

若兩圓相交或相切，作法簡易和明顯，故從略。
若兩個圓沒有相交，且 $AB > a + b$，作圖方法如下（圖 125）：

1. 作外公切綫，分別切兩圓於 R 和 S。（參閱 **5.4** 作外公切綫）
2. 利用垂直平分綫，找出 RS 的中點 T。
3. 連接 AB。
4. 作過 T 且垂直於 AB 之綫，交 AB 於 O。

作圖完畢。

證明如下：

設 Q 為此垂綫上任意一點。
$TR = TS$
$P_{TA} = P_{TB}$
$P_{TA} - P_{TB} = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(TA^2 - a^2\right) - \left(TB^2 - b^2\right) \\
&= (AO^2 + OT^2) - (OB^2 + OT^2) - a^2 + b^2 \\
&= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 \ \cdots\cdots \ (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{QA} - P_{QB} &= (QA^2 - a^2) - (QB^2 - b^2) \\
&= QA^2 - QB^2 - a^2 + b^2 \\
&= (AO^2 + OQ^2) - (OB^2 + OQ^2) - a^2 + b^2 \\
&= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 = 0 \quad \text{由 (2) 式所得}
\end{aligned}
$$

$\therefore OTQ$ 為兩圓的根軸。

證明完畢。

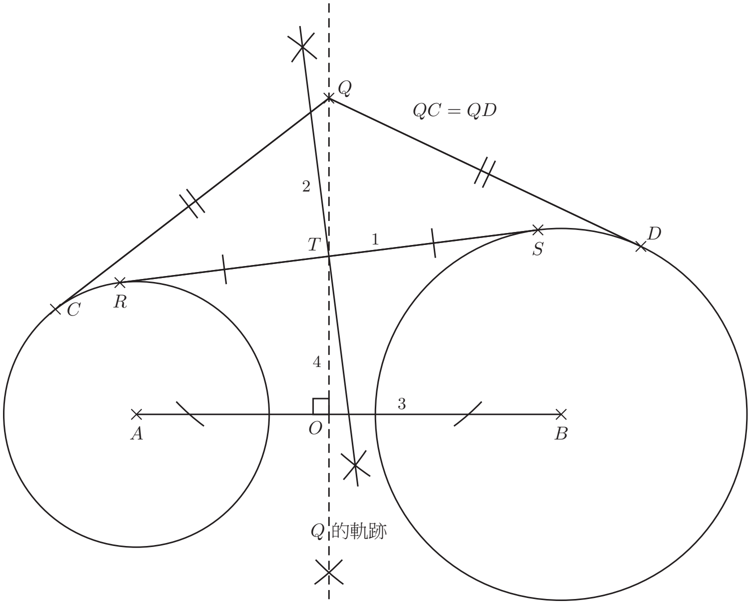


圖 125

若兩個圓沒有相交，且 $0 < AB < a–b$，作圖方法如下（圖 126）：

1. 連接 AB，其延長綫交大圓（圓心 A）於 L 和 G，交小圓（圓心 B）於 E 和 F。
   $LG = 2a$， $EF = 2b$， L、 A、 E、 B、 F、 G 順序共綫。
2. 過 B 作垂直於 AG 之綫段，交大圓（圓心 A）於 J。
3. 以 J 為圓心， JE 為半徑作一圓，交大圓（圓心 A）於 H 及 K。
4. 連接 HK，其延長綫交 AB 的延長綫於 O。
5. 過 O 作垂直於 AO 之綫段。

作圖完畢。

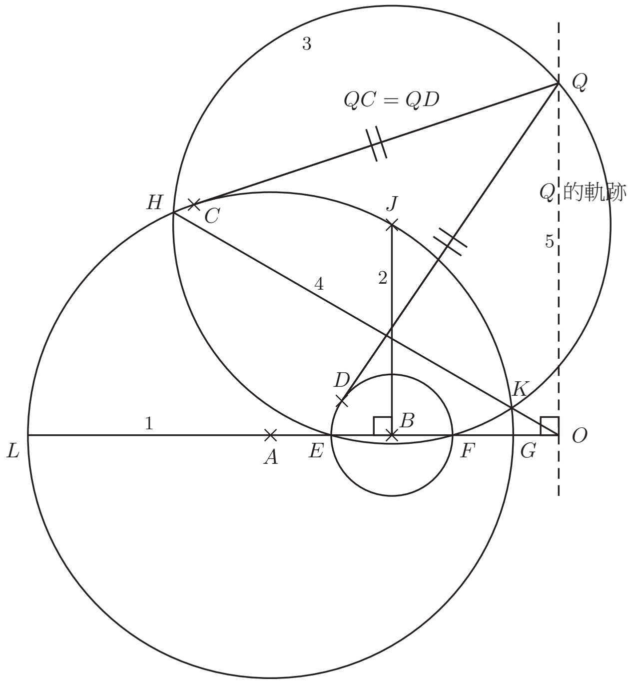


圖 126

證明如下：

$\triangle BEJ \cong \triangle BFJ$ （S.A.S.）
$\therefore JF = JE$ （全等三角形的對應邊）

$\therefore$ 步驟 3 的圓經過 E、 F、 K 及 H。
設 Q 為步驟 5 的垂綫上任意一點。
考慮圓 $EFKH$，由相交弦定理（intersecting chords theorem），得知
$OE \cdot OF = OH \cdot OK$
$P_{OA} = OA^2 - a^2 = (OA + a)(OA - a) = OL \cdot OG = OH \cdot OK$ （相交弦定理）
$P_{OB} = OB^2 - b^2 = (OB + b)(OB - b) = OE \cdot OF = OH \cdot OK$ （相交弦定理）

$\therefore P_{OA} = P_{OB}$
即 O 在根軸上。 OQ 便是該根軸，證明完畢。

討論： 若 $A = B$，則兩圓為同心圓，步驟 4 中 HK 與 AB 平行而沒有交點；此時根軸在無限遠。

[編者按：上述步驟 2 中的 J 點不須在大圓上，只須在 EF 的垂直平分綫上，令 $JE = JF$。以 J 為圓心， JE 為半徑的圓與大圓相交於 H 及 K，則 E、 F、 K 及 H 共圓。]

5.8.4 根心（Radical Centre）

已給三個圓，圓心分別為 A、 B 及 C，半徑分別為 a、 b 和 c；其圓心不共綫。證明三條根軸共點（圖 127）。

設 L_1 為 B 與 C 的根軸； L_2 為 A 與 C 的根軸； L_3 為 A 與 B 的根軸。假設其中兩條根軸 L_2、 L_3 相交於 O。

$P_{OA} = P_{OB}$ 及 $P_{OA} = P_{OC}$

$\therefore P_{OB} = P_{OC}$

$\therefore L_1$ 經過 O 點。

$\therefore L_1$、 L_2、 L_3 共點於 O。

O 點稱為根心（radical centre）。

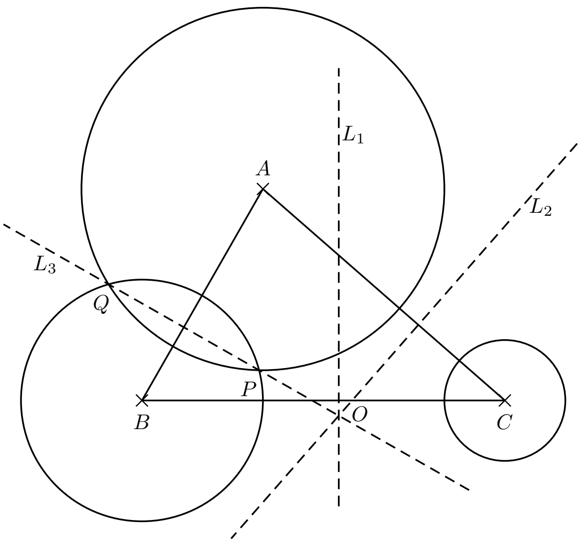


圖 127

練習題：

由於 $P_{OA} = P_{OB} = P_{OC}$

$\therefore$ 過 O 至這三個圓的切綫長度相等。

假設長度為 t。

以 O 為圓心， t 為半徑，作一圓，試證明此圓與原先三個圓垂直相交。(cut each other orthogonally)

5.9 作一圓經過已知點並相切已知直綫於特定點

如圖 128，已給直綫 L 經過 T 點，作一圓經過 P 點（不在 L 上），及與 L 相切於 T 點。

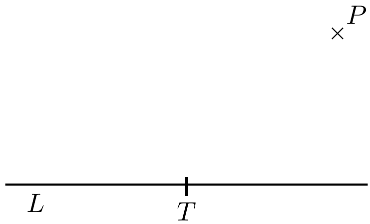


圖 128

作圖方法如下：

1. 連接 TP。

若 PT 與 L 垂直（圖 129），

2. 作 TP 的垂直平分綫， O 為 TP 的中點。
3. 以 O 為圓心， OT 為半徑作一圓。

作圖完畢。易證此圓經過 P 及切 L 於 T。

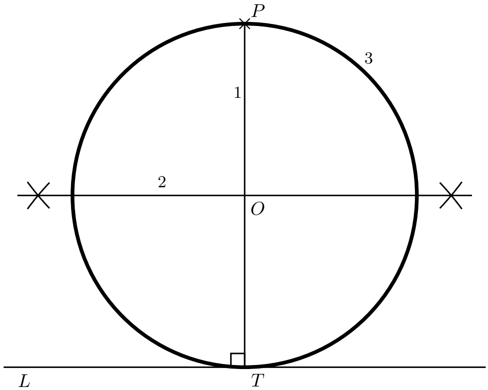


圖 129

否則， PT 與 L 不垂直（圖 130），

2. 過 T 作一綫段 TG 垂直於 L。
3. 作 TP 的垂直平分綫，交 TG 於 O。 H 為 TP 的中點。
4. 以 O 為圓心， OT 為半徑作一圓。

作圖完畢。

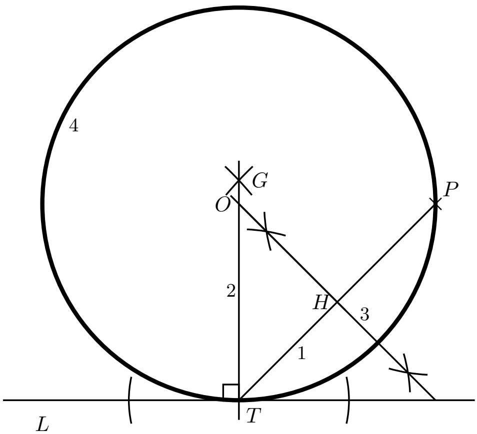


圖 130

證明如下：

$\angle OHT = \angle OHP = 90^\circ$	（垂直平分綫的性質）
$OH = OH$	（公共邊）
$HT = HP$	（垂直平分綫的性質）
$\therefore \triangle OHT \cong \triangle OHP$	（S.A.S.）
$OT = OP$	（全等三角形的對應邊）
$\therefore$ 該圓經過 T、 P。	
$OT \perp L$	（由作圖所得）
$\therefore$ 該圓切 L 於 T。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）
$\therefore$ 該圓滿足所有條件，證明完畢。	

5.10 作二圓經過已知點並與一已知角的兩邊相切

如圖 131，已給 $\angle AOB$（其中 $\angle AOB < 180°$），一點 P 在 $\angle AOB$ 內，作二圓經過 P，且與 OA 及 OB 相切。

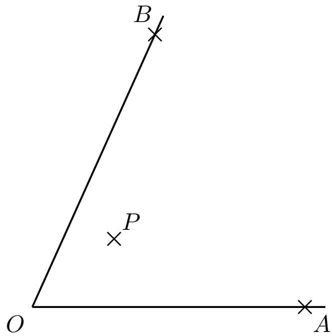


圖 131

作圖方法如下：

1. 連接 OP。
2. 作 AOB 的角平分綫。
3. 在角平分綫上任取一點 D。分別作過 D 且垂直於 OA 及 OB 之綫段， E 和 G 分別為兩垂足。
4. 以 D 為圓心， DE 為半徑作一圓，交 OP 於 C 及 F，其中 $OC < OF$。

若 P 在此角平分綫上（圖 132），

5. 連接 EF，過 P 作一綫段與 EF 平行，交 OA 於 R。
   連接 CE，過 P 作一綫段與 CE 平行，交 OA 於 T。

6. 過 R 作垂直於 OA 之綫段，交角平分綫於 Q。過 Q 作垂直於 OB 之綫段， S 為其垂足。過 T 作垂直於 OA 之綫段，交角平分綫於 U。過 U 作垂直於 OB 之綫段， V 為其垂足。

7. 以 Q 為圓心， QR 為半徑作一圓 H_1。以 U 為圓心， UT 為半徑作另一圓 H_2。

此二圓經過 P，且與 OA 及 OB 相切。作圖完畢。

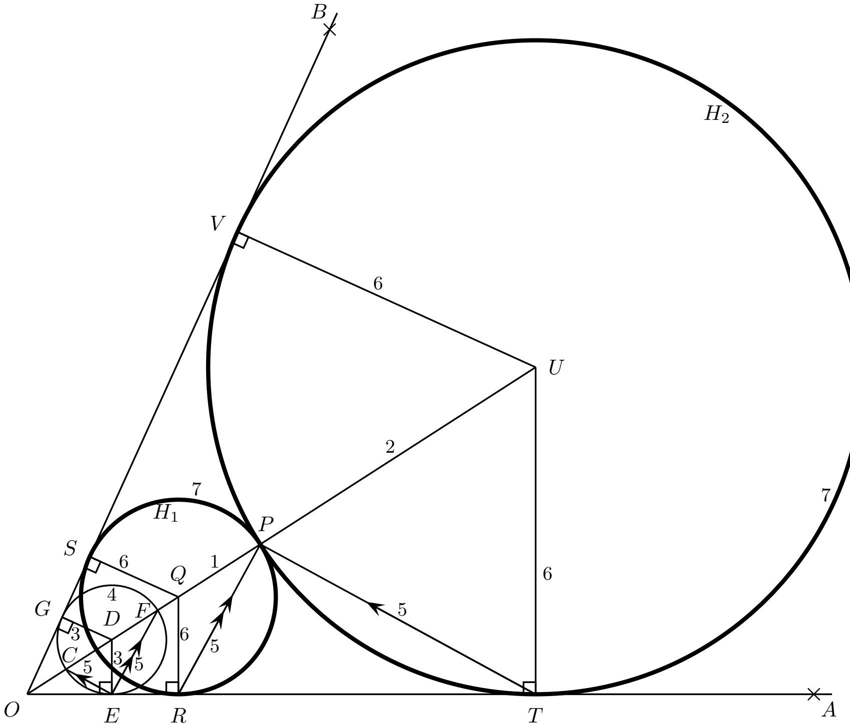


圖 132

證明如下：

$\angle DOE = \angle DOG$	（角平分綫）
$OD = OD$	（公共邊）
$\angle DEO = 90^\circ = \angle DGO$	（由作圖所得）
$\triangle DOE \cong \triangle DOG$	（A.A.S.）
$DE = DG$	（全等三角形的對應邊）
步驟 4 的圓分別切 OA 及 OB 於 E 及 G	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）
$\angle QOR = \angle QOS$	（角平分綫）
$OQ = OQ$	（公共邊）
$\angle QRO = 90^\circ = \angle QSO$	（由作圖所得）
$\therefore \triangle QOR \cong \triangle QOS$	（A.A.S.）
$QR = QS$	（全等三角形的對應邊）
圓 H_1 分別切 OA 及 OB 於 R 及 S。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）
$\angle DEO = 90^\circ = \angle QRO$	
$DE//QR$	（同位角相等）
$\angle EDF = \angle RQP$	（對應角， $DE//QR$）
$\angle DFE = \angle QPR$	（對應角， $FE//PR$）
$\therefore \angle DEF = \angle QRP$	（三角形內角和）
$\triangle DEF \sim \triangle QRP$	（等角）
$\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{QP}{QR}$	（相似三角形的對應邊）
$\because DF = DE$	（半徑）
$\therefore QP = QR$	
$\therefore$ 圓 H_1 經過 P。	

利用相同的方法，可證明圓 H_2 分別切 OA 及 OB 於 T 及 V，及經過 P。

證明完畢。

若 P 不在此角平分綫上，作圖步驟 1 至 4 與上文相同（圖 133）。

5. 連接 DF，過 P 作一綫段與 DF 平行，交角平分綫於 Q。
   連接 CD，過 P 作一綫段與 CD 平行，交角平分綫於 U。
6. 分別作過 Q 且垂直於 OA 及 OB 之綫段， R 和 S 分別為兩垂足。
   分別作過 U 且垂直於 OA 及 OB 之綫段， T 和 V 分別為兩垂足。
7. 以 Q 為圓心， QR 為半徑作一圓 H_1。以 U 為圓心， UT 為半徑作另一圓 H_2。

作圖完畢。

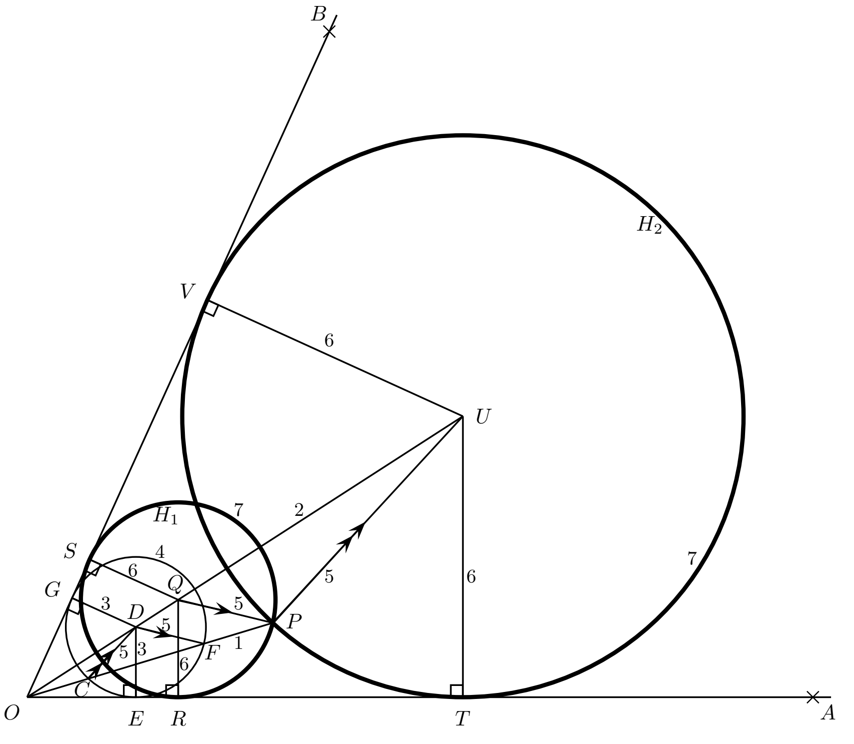


圖 133

證明如下：

一如上文分析，步驟 4 的圓分別切 OA 及 OB 於 E 及 G。

$\angle QOR = \angle QOS$	（角平分綫）
$OQ = OQ$	（公共邊）
$\angle QRO = 90^\circ = \angle QSO$	（由作圖所得）
$\therefore \triangle QOR \cong \triangle QOS$	（A.A.S.）
$QR = QS$	（全等三角形的對應邊）
圓 H_1 分別切 OA 及 OB 於 R 及 S。	（切綫 ⊥ 半徑的逆定理）
$\triangle ODG \sim \triangle OQS$ 及 $\triangle ODF \sim \triangle OQP$	（等角）
$\dfrac{QS}{DG} = \dfrac{OQ}{OD}$ 及 $\dfrac{OQ}{OD} = \dfrac{QP}{DF}$	（相似三角形的對應邊）

$\therefore \dfrac{QS}{DG} = \dfrac{QP}{DF}$

$\because DG = DF$

$\therefore QS = QP$

$\therefore$ 圓 H_1 經過 P。

利用相同的方法，可證明圓 H_2 分別切 OA 及 OB 於 T 及 V，及經過 P。

證明完畢。

5.11 作二圓經過兩已知點並與已知直綫相切

如圖 134，已給一直綫 L，兩點 A、 B 在 L 的同一方，且 AB 與 L 不平行及垂直。作二圓經過 A、 B 及與 L 相切。

圖 134

作圖方法如下（圖 135、圖 136 及圖 137）：

1. 連接 AB，其延長綫交 L 於 D。
2. 作 AB 的垂直平分綫，交 L 於 G， H 為 AB 的中點。
3. 以 G 為圓心， GA 為半徑作一圓。

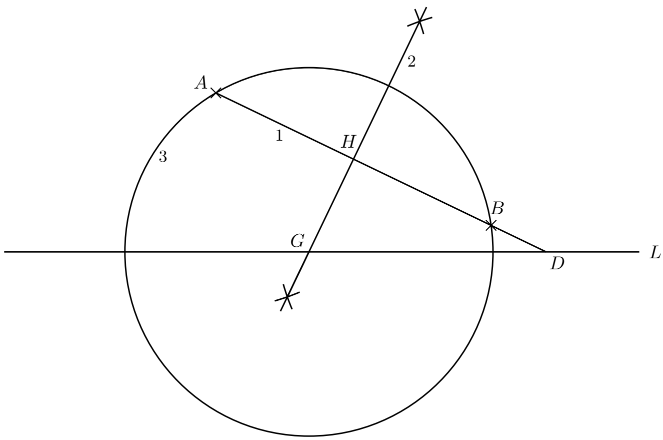


圖 135

4. 作 GD 的垂直平分綫， M 為 GD 的中點。

5. 以 M 為圓心， MG 為半徑作一圓，交步驟 3 的圓於 E。

6. 連接 EG、 DE。

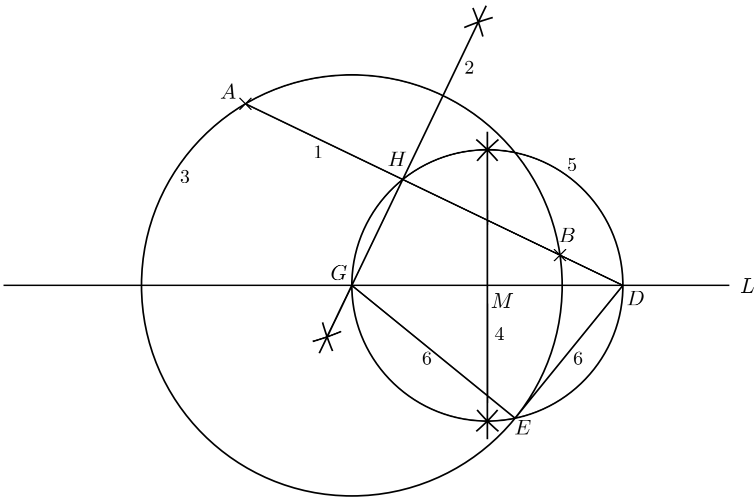


圖 136

7. 以 D 為圓心， DE 為半徑作一圓，交 L 於 F（在 D 與 G 之間）及 C（在 GD 之延長部分）。

8. 過 F 作一綫段垂直於 L，且交 GH 的延綫於 O，過 C 作一綫段垂直於 L，且交 GH 的延長綫於 Q。

9. 以 O 為圓心， OA 為半徑作一圓；以 Q 為圓心， QA 為半徑作一圓。

作圖完畢。

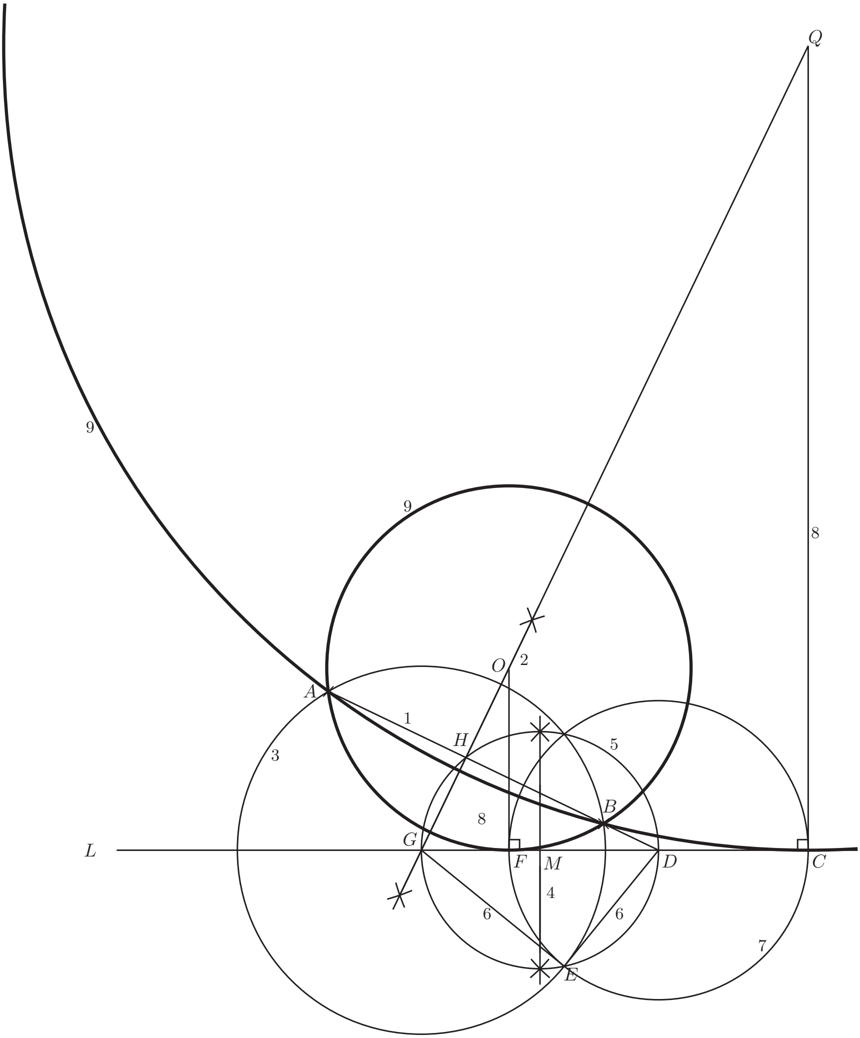


圖 137

證明如下：

$\angle AHG = \angle BHG = 90^\circ$	（由作圖所得）
$GH = GH$	（公共邊）
$AH = HB$	（由作圖所得）
$\therefore \triangle AGH \cong \triangle BGH$	（S.A.S.）
$GA = GB$	（全等三角形的對應邊）
$\therefore$ 步驟 3 的圓經過 A、 B。	

利用相同的方法，可證明步驟 9 的二圓皆經過 A、 B。

$\angle GED = 90^\circ$	（半圓上的圓周角）
$\therefore DE$ 切步驟 3 的圓於 E	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）
$DA \times DB = DE^2$	（相交弦定理）
$\because DE = DF = DC$	（半徑）
$\therefore DA \times DB = DF^2$ 及 $DA \times DB = DC^2$	
$\therefore DF$ 切圓 ABF 於 F 及 DC 切圓 ABC 於 C。	
	（相交弦定理的逆定理）

證明完畢。

註： 若 AB 與 L 垂直，則作圖方法第 2 點中 AB 的垂直平分綫與 L 並不相交，但仍可作二圓經過 A、 B 並與 L 相切。請讀者自行推敲。

已給一直綫 L，兩點 A、 B 在 L 的同一方，且 AB 與 L 平行。作一圓經過 A、 B 及與 L 相切。

作圖方法如下（圖 138）：

1. 作 AB 的垂直平分綫，交 L 於 C。
2. 連接 AC。
3. 作 AC 的垂直平分綫，交步驟 1 的垂直平分綫於 O， O 為 $\triangle ABC$ 的外心。
4. 以 O 為圓心， OA 為半徑，作一圓。

作圖完畢。

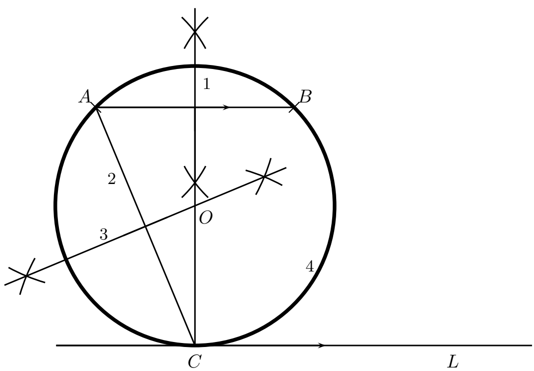


圖 138

證明如下：

$OC \perp L$	（同傍內角， $AB//L$）
該圓切 L 於 C	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

註： 若 A、 B 在 L 的不同一方，則不能作一圓經過 A、 B 且與 L 相切。

5.12 作二圓與已知圓相切並與已知直綫相切於特定點

如圖 139，已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C（圓心 G）與 L 相交，其中 P 點在圓 C 外。作二圓外切 C，且與 L 相切於 P 點。

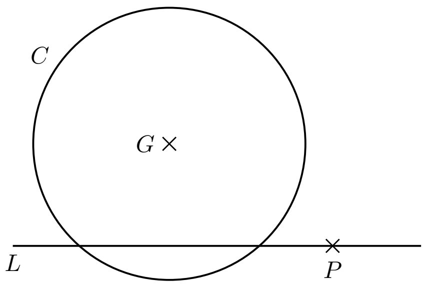


圖 139

作圖方法如下（圖 140）：

1. 過 P 作 AP 垂直於 L。
2. 過 G 作 EB 垂直於 L，交 L 於 B，交圓 C 於 E（離 L 較遠一端）及 D（離 L 較近一端）。
3. 連接 DP，交圓 C 於 J；連接 EP，交圓 C 於 F。
4. 連接 GF，其延長綫交 AP 於 H；連接 GJ，其延長綫交 AP 的延長綫於 K。
5. 以 H 為圓心， HF 為半徑作一圓 C_1；以 K 為圓心， KJ 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢。

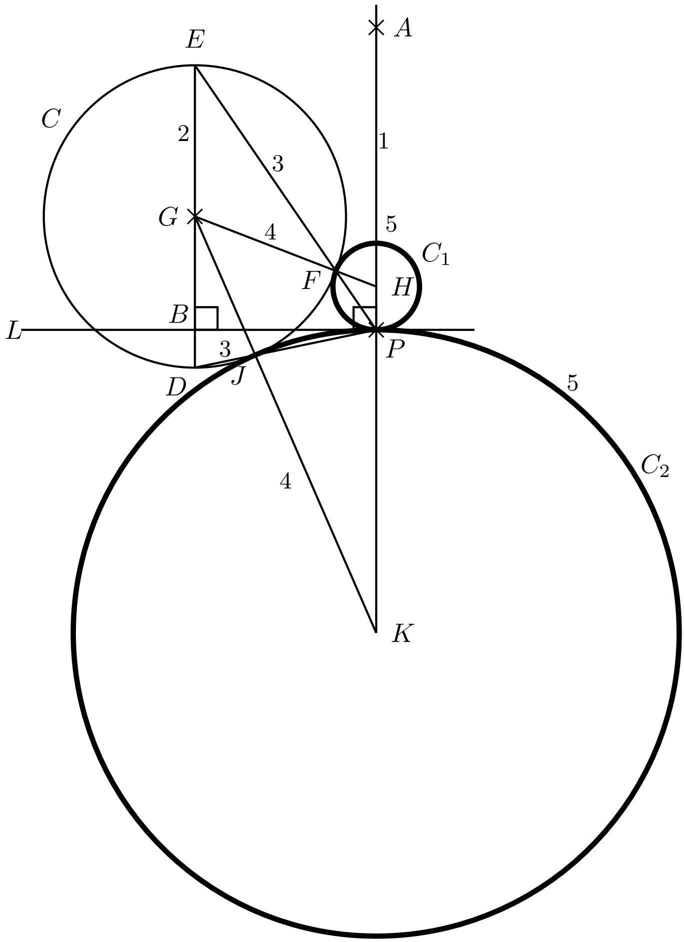


圖 140

證明如下：

$\angle GBP + \angle HPB = 90° + 90° = 180°$	（由作圖所得）
$EB//HP$	（同傍內角互補）
$\triangle EFG \sim \triangle PFH$	（等角）
$\dfrac{HP}{GE} = \dfrac{HF}{GF}$	（相似三角形的對應邊）
$\because GE = GF$	（圓 C 的半徑）
$\therefore HF = HP$	
圓 C_1 經過 F、 P	
G、 F、 H 共綫	
$HF + FG = HG$	
$\therefore$ 圓 C_1 外切 C 於 F	
$\angle BPH = 90°$	（由作圖所得）
$\therefore$ 該圓與 L 相切於 P	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一外切圓，滿足所需條件。

證明完畢。

已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C（圓心 G）不與 L 相交。分別作一圓 C_1 外切 C 及另一圓 C_2 內切 C，且與 L 相切於 P 點。

作圖方法（圖 141）與第 155頁相似。

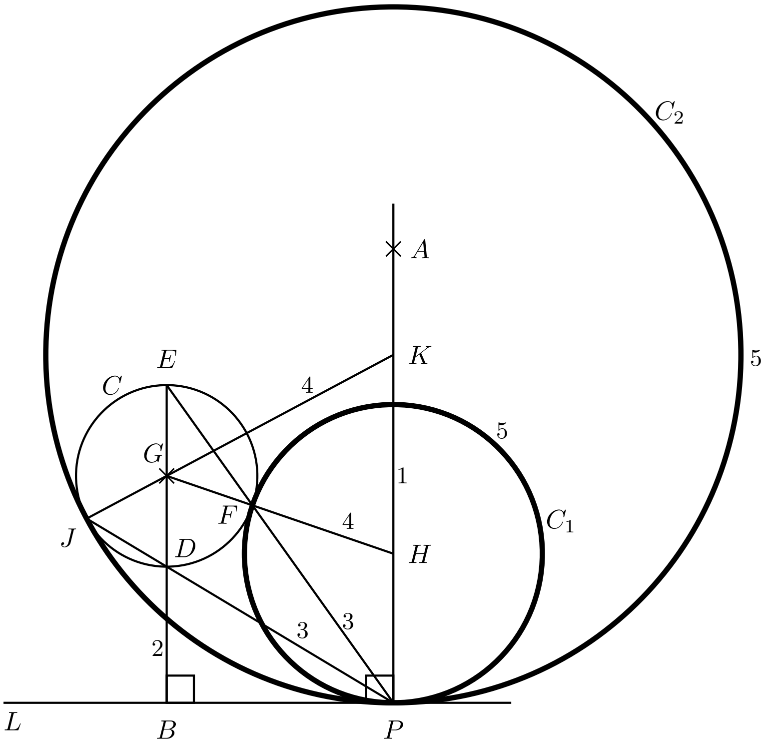


圖 141

現證明 C_2 為一內切圓：

$\angle GBP + \angle HPB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	（由作圖所得）
$EB // AP$	（同傍內角互補）
$\triangle DJG \sim \triangle PJK$	（等角）
$\dfrac{KP}{GD} = \dfrac{KJ}{GJ}$	（相似三角形的對應邊）
$\because GD = GJ$	（圓 C 的半徑）
$\therefore KP = KJ$	
圓 C_2 經過 P 及 J	
$\because J$、 G、 K 共綫	
$\therefore GK = JK - GJ$	
$\therefore$ 圓 C_2 內切 C 於 J	
$\angle BPK = 90^\circ$	（由作圖所得）
$\therefore$ 圓 C_2 與 L 相切於 P。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

利用相同的方法，可證明 C_1 為一外切圓，滿足所需條件。

已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C（圓心 G）與 L 相交，其中 P 點在圓 C 內。作二圓內切 C，且與 L 相切於 P 點。

作圖方法（圖 142）與第 155頁相似：

1. 過 P 作 AP 垂直於 L。
2. 過 G 作 ED 垂直於 L，交 L 於 B，交圓 C 於 E（離 L 較遠一端）及 D（離 L 較近一端）。
3. 連接 DP，其延長綫交圓 C 於 J；連接 EP，其延長綫交圓 C 於 F。
4. 連接 GF，交 AP 的延長綫於 H；連接 GJ，交 AP 於 K。
5. 以 H 為圓心，HF 為半徑作一圓 C_2；以 K 為圓心，KJ 為半徑作一圓 C_1。

作圖完畢。

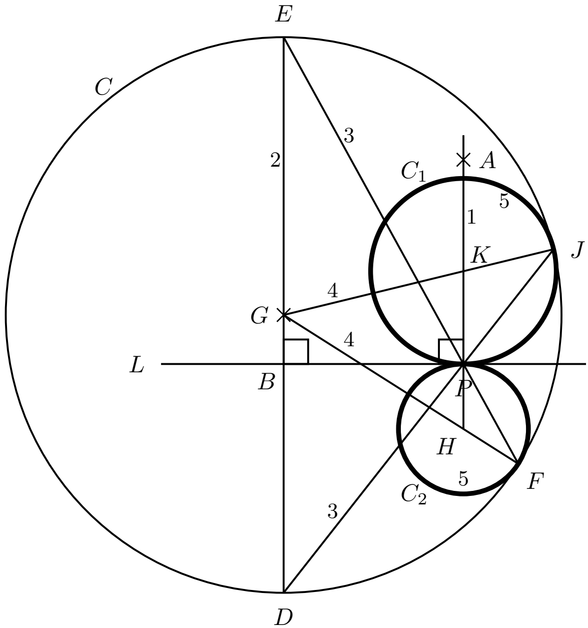


圖 142

證明從略。

5.13 作二圓與已知圓相切於特定點並相切於已知直綫

如圖 143，已給直綫 L，及一圓 C（圓心 G）經過 P 點，且不與 L 相交。作一圓 C_1 外切 C 於 P 點及一圓 C_2 內切 C 於 P 點，且與 L 相切。

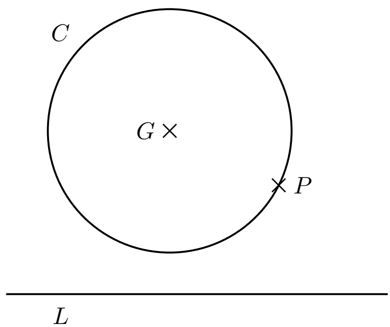


圖 143

作圖方法如下（圖 144）：

1. 過 G 作 MD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 M（離 L 較遠一端）及 N（離 L 較近一端）。
2. 連接 MP，其延長綫交 L 於 A；連接 PN，其延長綫交 L 於 B。
3. 連接 GP。
4. 過 A 作一綫垂直於 L，交 GP 的延長綫於 K。過 B 作一綫垂直於 L，交 PG 的延長綫於 H。
5. 以 K 為圓心， KP 為半徑作一圓 C_1；以 H 為圓心， HP 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢。

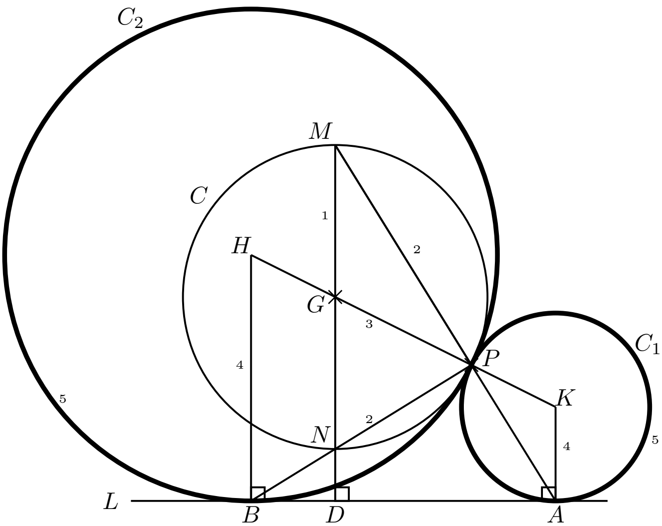


圖 144

證明如下：

$\angle HBD + \angle MDB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	（由作圖所得）
$\angle KAD + \angle MDA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$	（由作圖所得）
$\therefore HB \mathbin{//} MD \mathbin{//} KA$	（同傍內角互補）
$\triangle MGP \sim \triangle AKP$ 及	（等角）
$\triangle NGP \sim \triangle BHP$	（等角）
$\dfrac{KP}{KA} = \dfrac{GP}{GM}$ 及 $\dfrac{HP}{HB} = \dfrac{GP}{GN}$	（相似三角形的對應邊）
$\because GM = GP$ 及 $GN = GP$	（圓 C 的半徑）

$\therefore KP = KA$ 及 $HP = HB$

圓 C_1 經過 A、 P 及圓 C_2 經過 B、 P。

$\because H$、 G、 P、 K 共綫

$\therefore GP + PK = GK$ 及 $HP - GP = HG$

圓 C_1 外切圓 C 於 P 及圓 C_2 內切圓 C 於 P。

$\angle KAD = 90^\circ = \angle HBD$	（由作圖所得）
$\therefore$ 圓 C_1 及圓 C_2 與 L 相切。	（切綫 $\perp$ 半徑的逆定理）

證明完畢。

已給直綫 L，及一圓 C（圓心 G）經過 P 點，且與 L 相交，其中 P 點不在 L 上。作一圓 C_1 內切 C 於 P 點及一圓 C_2 外切 C 於 P 點，且與 L 相切。

作圖方法（圖 145）與第 162 頁相似：不妨假設 P 與 G 在 L 的相反一方。

1. 過 G 作 MD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 M（與 G 在 L 的同一方）及 N（與 G 在 L 的相反一方）。
2. 連接 MP，交 L 於 A；連接 NP，其延長綫交 L 於 B。
3. 連接 GP。
4. 過 A 作 AK 垂直於 L，交 GP 於 K。過 B 作 BH 垂直於 L，交 GP 的延長綫於 H。
5. 以 K 為圓心， KP 為半徑作一圓 C_1，以 H 為圓心， HP 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢，證明從略。

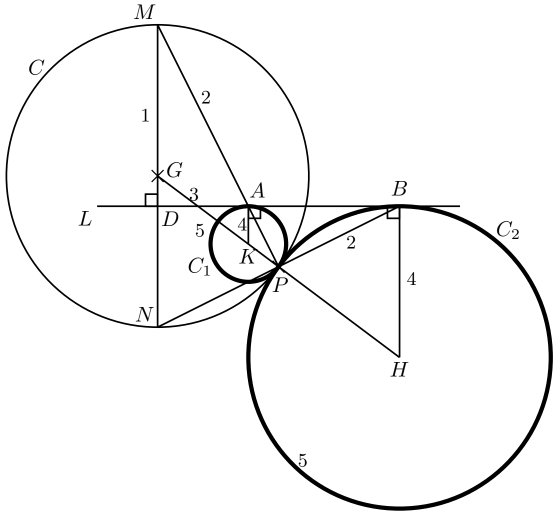


圖 145

思考題：

如圖 146，已給直綫 L，及一圓 C（圓心 G）經過 P 點，且與 L 相切於 D，其中 P 點不在 L 上。請問可作多少個圓與 C 相切，經過 P 點，且與 L 相切？作圖法如何？
另外，在圖 145 或圖 146 中，若 P 是圓 C 與 L 的交點，以上作圖法是否正確？

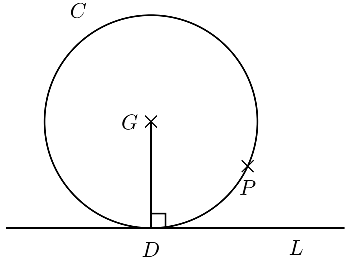


圖 146

5.14 作二圓經過已知點並相切於已知圓及已知直綫

如圖 147，已給直綫 L，一圓 C（圓心 O）與 L 不相交，一點 P 在 C 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的同一方。作二圓經過 P，外切 C，且與 L 相切。

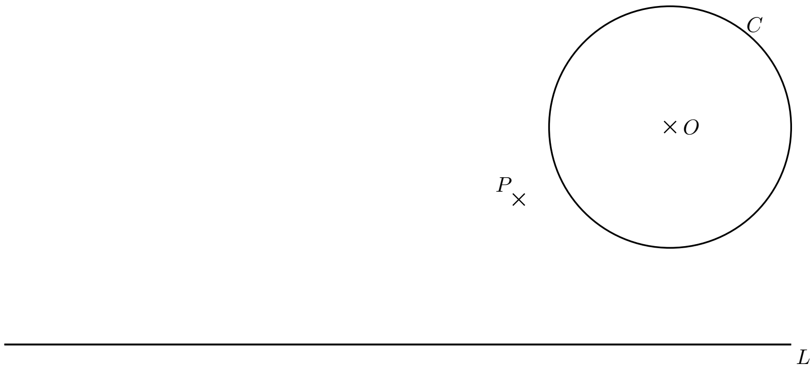


圖 147

作圖方法如下（圖 148）：

1. 過 O 作直綫 AOD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A（離 L 較遠一端）和 B（離 L 較近一端）。
2. 連接 AP，其延長綫交 L 於 F。
3. 作 $\triangle BDP$ 的外接圓，交 AF 於 E。
4. 由外點 F 引切綫 FG 至步驟 3 的圓上，切步驟 3 的圓於 G。
5. 以 F 為圓心， FG 為半徑，作一半圓，交 L 於 H （在 F 和 D 之間）及 I（在 DF 的延長綫上）。

6. 作 $\triangle EHP$ 的外接圓 C_1 及 $\triangle EIP$ 的外接圓 C_2。

7. 連接 AH，交圓 C 於 Q。連接 AI，交圓 C 於 R。

8. 連接 BQ 及 BR。

9. 過 H 作一綫段 JH 垂直於 L，交圓 C_1 於 J。過 I 作一綫段 IM 垂直於 L，交圓 C_2 於 M。

10. 連接 OQ，其延長綫交 JH 於 K。連接 OR，其延長綫交 IM 於 N。

作圖完畢。

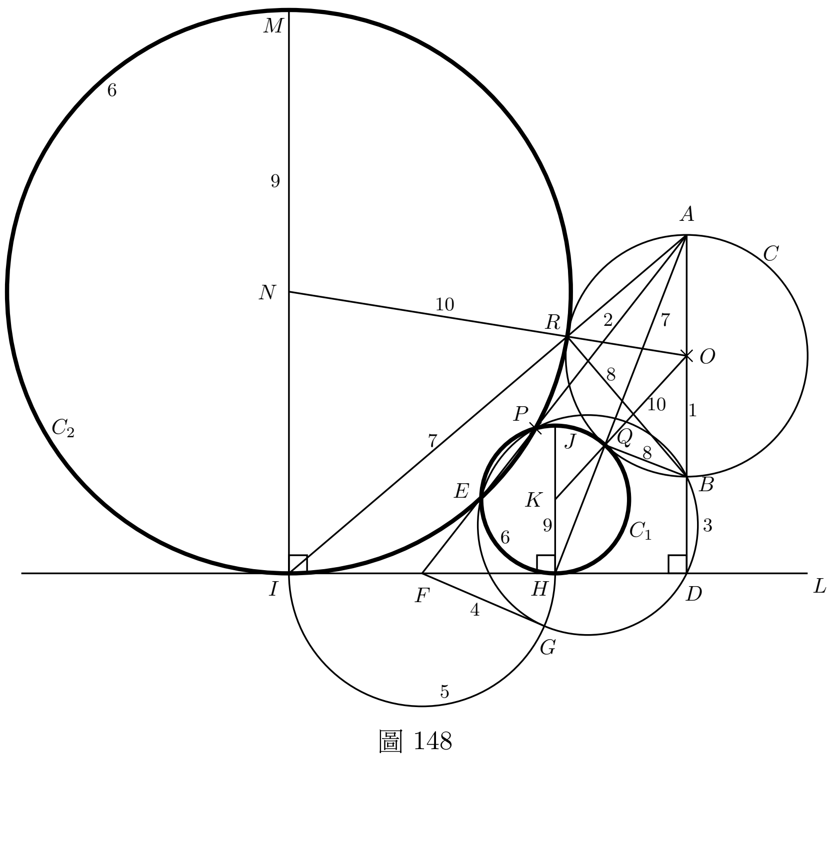


圖 148

註：　若 P 和 O 在 L 的相反一方，且圓 C（圓心 O）與 L 不相交，則不能作外切圓。

證明如下：

$\because FG = FH$	（半徑）
考慮步驟 3 的圓：	
$FE \times FP = FG^2$	（相交弦定理）
$\therefore FE \times FP = FH^2$	
$\therefore FH$ 是圓 C_1 的切綫	（相交弦定理的逆定理）
即 L 切圓 C_1 於 H。	
$\angle AQB = 90^\circ$	（半圓上的圓周角）
$\angle BDH = 90^\circ$	（由作圖所得）
$\therefore \angle AQB = \angle BDH$	
B、D、H、Q 四點共圓	（外角 = 內對角）
$AB{\cdot}AD = AQ{\cdot}AH \quad \cdots\cdots \quad (1)$	（相交弦定理）
$\because$ 步驟 3 的圓經過 B、D、E、P	
$\therefore AB{\cdot}AD = AE{\cdot}AP \quad \cdots\cdots \quad (2)$	（相交弦定理）
$(1) = (2)$:	
$AQ{\cdot}AH = AE{\cdot}AP$	（等量代換）
$\therefore E$、H、Q、P 四點共圓	（相交弦定理的逆定理）
JH 為圓 C_1 的直徑	（切綫 L 切圓 C_1 於 H，且 $JH \perp L$）
$AO//JH$	（同位角相等）
$\angle QAO = \angle QHK$	（錯角，$AO//JH$）
$\angle AQO = \angle HQK$	（對頂角）
$\triangle AOQ \sim \triangle HKQ$	（等角）
$\angle AQB = 90^\circ = \angle HQJ$	（半圓上的圓周角）
$\angle AQB – \angle AQO = \angle HQJ – \angle HQK$	（等量代換）
$\therefore \angle BQO = \angle JQK$	

$\triangle BOQ \sim \triangle JKQ$ （等角）
$\dfrac{KQ}{KH} = \dfrac{OQ}{OA}$ 及 $\dfrac{KQ}{KJ} = \dfrac{OQ}{OB}$ （相似三角形的對應邊）
$\because OQ = OA$ 及 $OQ = OB$ （圓 C 的半徑）
$\therefore KQ = KH$ 及 $KQ = KJ$
$\therefore KH = KJ$
$\therefore K$ 為圓 C_1 的圓心
O、 Q、 K 共綫。
$OQ + QK = OK$
圓 C_1 與圓 C 外切於 Q。

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一外切圓，滿足所需條件。

證明完畢。

已給直綫 L，一圓 C(圓心 O) 與 L 相交，一點 P 在 C 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的相反一方。作二圓經過 P，外切 C，且與 L 相切。

作圖方法如下（圖 149）：

1. 過 O 作直綫 AOB 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A（與 O 在 L 的同一方）和 B（與 O 在 L 的相反一方）。
2. 連接 BP，其延長綫交 L 於 F。
3. 作 $\triangle ADP$ 的外接圓，交 BF 於 E。
4. 由外點 F 引切綫 FG 至步驟 3 的圓上，切該圓於 G。
5. 以 F 為圓心， FG 為半徑，作一半圓，交 L 於 H（在 F 和 D 之間）及 I（在 DF 的延長綫上）。
6. 作 $\triangle EHP$ 的外接圓 C_1 及 $\triangle EIP$ 的外接圓 C_2。

作圖完畢。

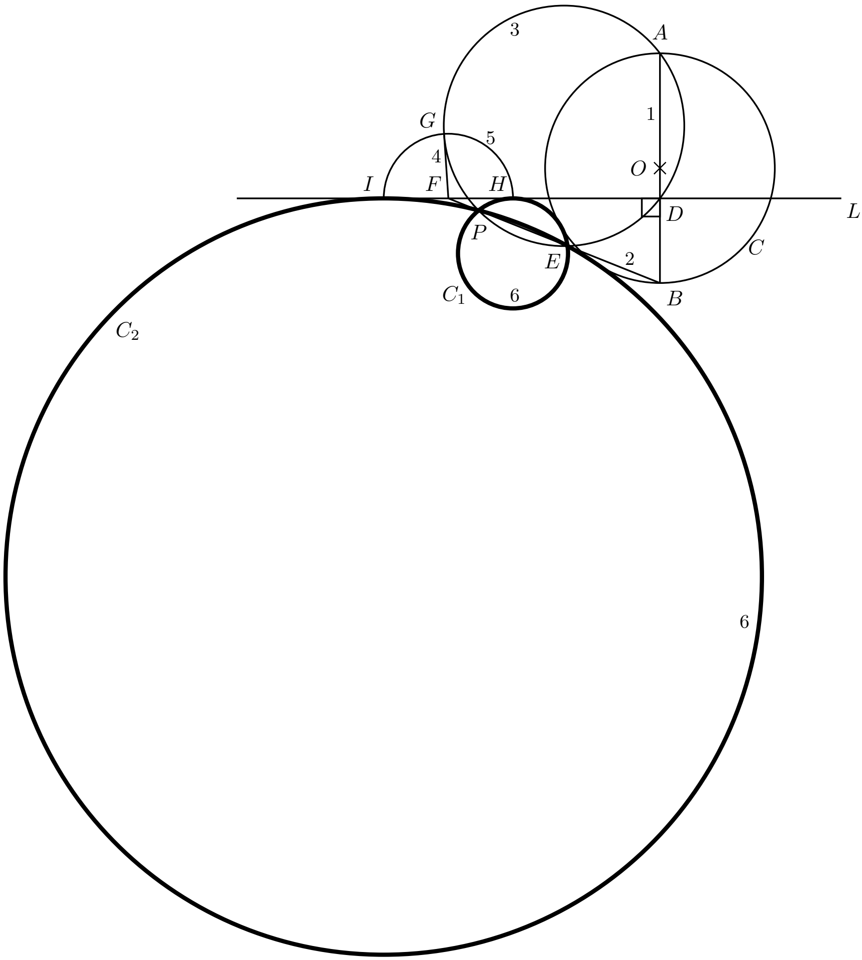


圖 149

證明從略。

註： 若圓 C 與 L 相交或相切，且 P 和 O 在 L 的相同一方；由於 F 點在步驟 3 的圓內，故未能由 F 引切綫至該圓上，所以不能完成步驟 4（圖 150）。

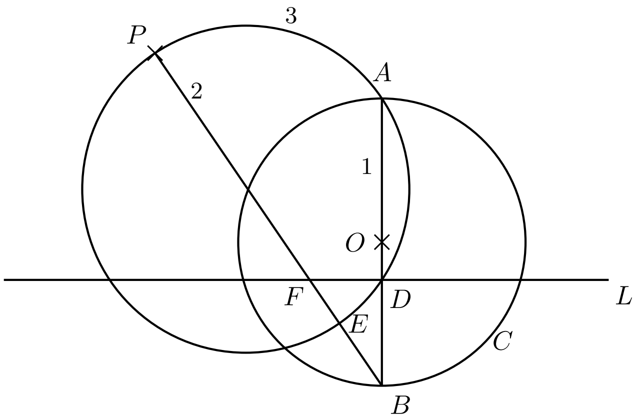


圖 150

已給直綫 L，一圓 C（圓心 O）與 L 不相交，一點 P 在 C 外及不在 L 上，且 P 和 O 在 L 的同一方。作二圓經過 P，內切 C，且與 L 相切。

作圖方法如下（圖 151）：

1. 過 O 作直綫 AOD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 A（離 L 較遠一端）和 B（離 L 較近一端）。
2. 連接 BP，其延長綫交 L 於 F。
3. 作 $\triangle ADP$ 的外接圓，交 FB 的延長綫於 E。
4. 由外點 F 引切綫 FG 至步驟 3 的圓上，切該圓於 G。
5. 以 F 為圓心， FG 為半徑，作一半圓，交 L 於 H（在 FD 的延長綫上）及 I（在 DF 的延長綫上）。
6. 作 $\triangle EHP$ 的外接圓 C_1 及 $\triangle EIP$ 的外接圓 C_2。
7. 連接 HB，其延長綫交圓 C 於 Q，連接 IB，其延長綫交圓 C 於 R。
8. 連接 AQ、 AR。
9. 過 H 作 JH 垂直於 L，交圓 C_1 於 J。過 I 作一綫段 IM 垂直於 L，交圓 C_2 於 M。
10. 連接 QO，其延長綫交 JH 於 K。連接 RO，其延長綫交 IM 於 N。

作圖完畢。

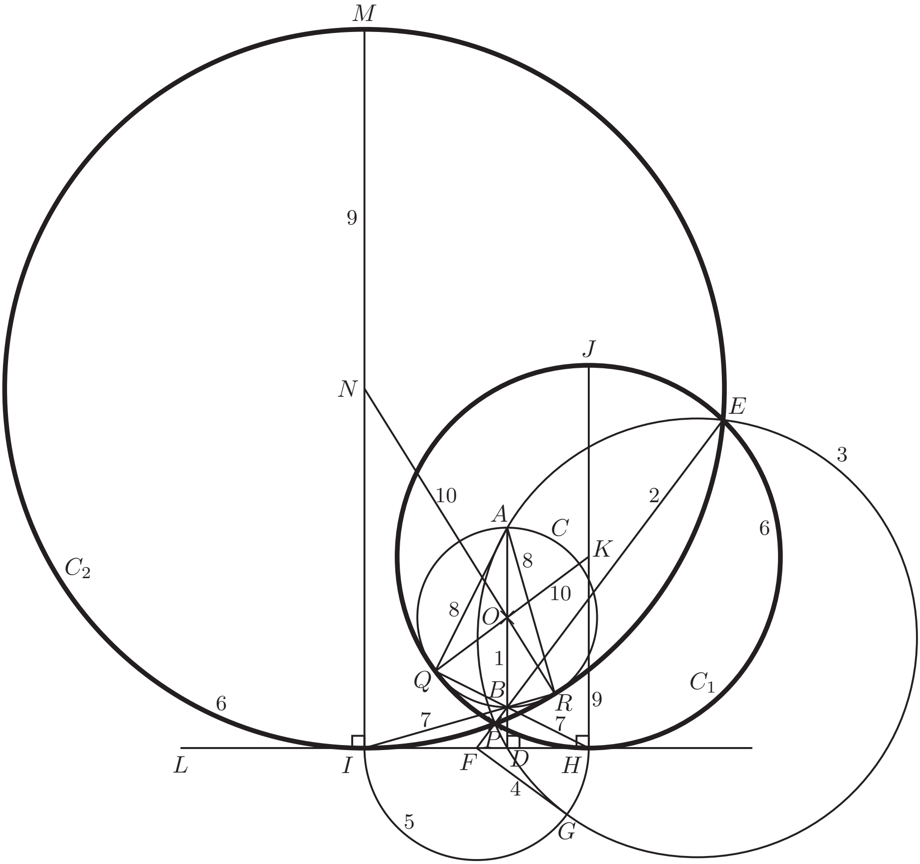


圖 151

證明如下：

考慮步驟 3 的圓 ADP。

$FE \times FP = FG^2$ （相交弦定理）

$\because FG = FH$ （半徑）

$\therefore FE \times FP = FH^2$

$\therefore FH$ 是圓 C_1 的切綫 （相交弦定理的逆定理）
即 L 切圓 C_1 於 H。
$\angle AQB = 90° = \angle BDH$ （半圓上的圓周角）
A、Q、D、H 四點共圓 （同弓形上的圓周角的逆定理）
$AB \cdot BD = QB \cdot BH \cdots\cdots (1)$ （相交弦定理）
$AB \cdot BD = PB \cdot BE \cdots\cdots (2)$ （於圓 ADP 應用相交弦定理）
$(1) = (2)$:
$QB \cdot BH = PB \cdot BE$ （等量代換）
$\therefore E$、H、P、Q 四點共圓 （相交弦定理的逆定理）
JH 為圓 C_1 的直徑 （切綫 L 切圓 C_1 於 H，且 $JH \perp L$）
$\angle BDF = 90° = \angle KHD$ （由作圖所得）
$OB // JH$ （同位角相等）
$\angle QBO = \angle QHK$ （同位角，$OB // JH$）
$\angle BQO = \angle HQK$ （公共角）
$\triangle BOQ \sim \triangle HKQ$ （等角）
$\angle AQB = 90° = \angle HQJ$ （半圓上的圓周角）
$\angle AQB – \angle BQO = \angle HQJ – \angle HQK$ （等量代換）
$\therefore \angle AQO = \angle JQK$
$\triangle AOQ \sim \triangle JKQ$ （等角）
$\dfrac{KQ}{KH} = \dfrac{OQ}{OB}$ 及 $\dfrac{KQ}{KJ} = \dfrac{OQ}{OA}$ （相似三角形的對應邊）
$\because OQ = OB$ 及 $OQ = OA$ （圓 C 的半徑）
$\therefore KQ = KH$ 及 $KQ = KJ$
$\therefore KH = KJ$
$\therefore K$ 為圓 C_1 的圓心
Q、O、K 共綫。
$QK - OK = QO$
圓 C_1 與圓 C 內切於 Q。

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一內切圓，滿足所需條件。

證明完畢。

註一： 若 P 和 O 在 L 的相反一方，由於 F 點在步驟 3 的圓內，故未能由 F 引切綫至該圓上，所以不能完成步驟 4（圖 152）。

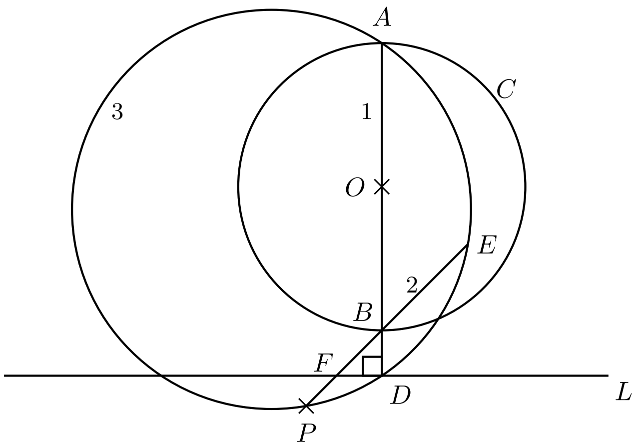


圖 152

註二： 若圓 C 與 L 相交或相切，同理也不能作內切圓（圖 153）。

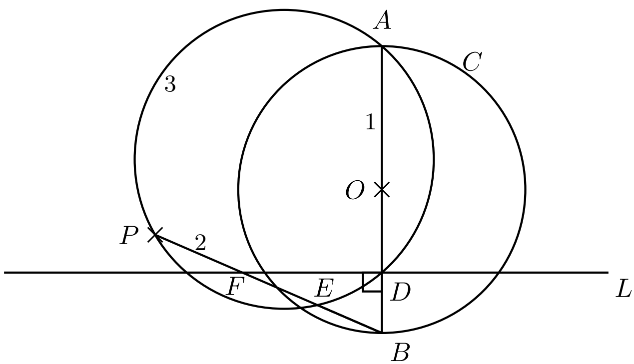


圖 153

5.15　作一圓經過已知點並外切於兩已知圓

如圖 154，已給兩個大小不同圓 C_1 和 C_2，圓心分別為 A 和 B，一點 P 在兩圓外。作一圓經過 P，外切該二圓。

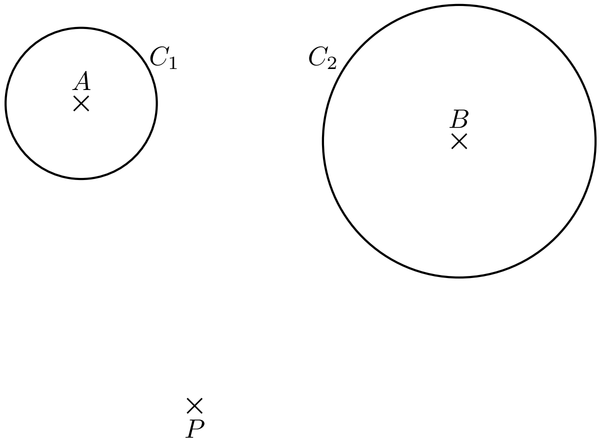


圖 154

作圖方法如下（圖 155）：

不妨假設圓 C_2 大於圓 C_1。

1. 作二圓的外公切綫 CD 切圓 C_1 於 C 及切圓 C_2 於 D。（參考 **5.4** 作外公切綫）
2. 連接 BA，其延長綫交 DC 的延長綫於 E。
3. 作 $\triangle CDP$ 的外接圓，交圓 C_2 於 G。
4. 連接 DG。
5. 連接 EP，交圓 CDP 於 H，其延長綫交 DG 的延長綫於 F。

6. 由外點 F 引切綫 FM 至圓 C_2 上，切該圓於 M（在圓 CDP 內）。
7. 作 $\triangle HMP$ 的外接圓。
8. 連接 EM，交圓 C_1 於 I、 N，其延長綫交圓 C_2 於 K。
9. 連接 AC 及 BD。
10. 連接 AI 及 AN。
11. 連接 CI、 CN 及 DM。
12. 連接 BM，其延長綫交 AN 的延長綫於 O，且交圓 HMP 於 J。

作圖完畢。

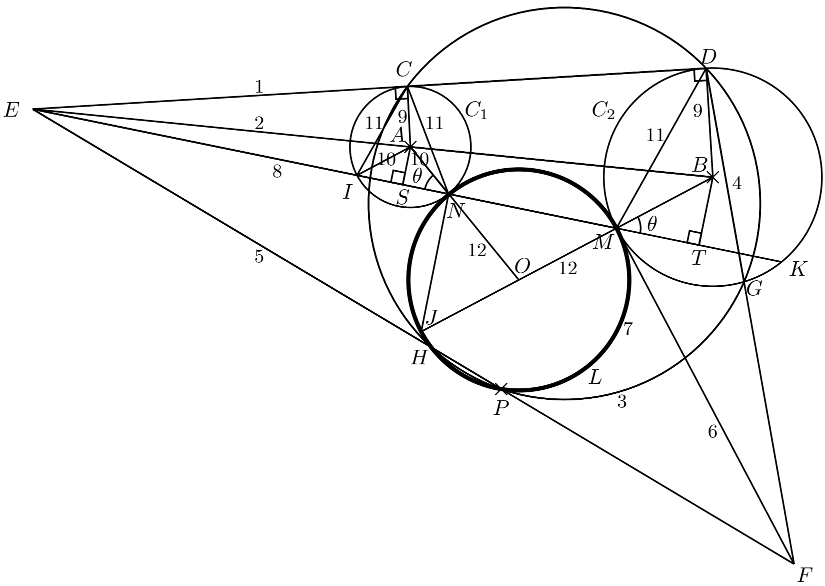


圖 155

證明如下：

分別設 S 和 T 為 A 及 B 至 EK 之垂足。

$FD \times FG = FM^2 \quad \cdots\cdots \quad (1)$ （於圓 C_2 應用相交弦定理）

$FD \times FG = FH \times FP \quad \cdots\cdots \quad (2)$ （於圓 CDP 應用相交弦定理）

$\therefore FH \times FP = FM^2$ （由 (1) 及 (2) 所得，等量代換）

$\therefore FM$ 切圓 HMP 於 M。 （相交弦定理的逆定理）

$\therefore FM$ 為圓 C_2 及圓 HMP 的公切綫。

$\therefore$ 圓 C_2 及圓 HMP 互相外切於 M。

另一方面， $\angle ACE = \angle BDE = 90°$ （切綫 $\perp$ 半徑）

$\angle AEC = \angle BED$ （公共角）

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE$ （等角）

$\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AE}{BE} \quad \cdots\cdots \quad (3)$ （相似三角形的對應邊）

$\angle ASE = \angle BTE = 90°$ （由作圖所得）

$\angle AES = \angle BET$ （公共角）

$\therefore \triangle AES \sim \triangle BET$ （等角）

$\dfrac{AS}{BT} = \dfrac{AE}{BE} \quad \cdots\cdots \quad (4)$ （相似三角形的對應邊）

比較 (3) 式及 (4) 式得：

$\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AS}{BT} \quad \cdots\cdots \quad (5)$

分別設圓 C_1 和圓 C_2 的半徑為 a 及 b。

由 (5) 式得：

$$\frac{AC}{BD} = \frac{a}{b} = \frac{AS}{BT}$$

$$\frac{AS}{a} = \frac{BT}{b}$$

$$\frac{AS}{AN} = \frac{BT}{BM}$$

$\therefore \sin\angle ANS = \sin\angle BMT$

$\therefore \angle ANS = \angle BMT \quad \cdots\cdots \quad (6)$

$\because AI = AN$ （圓 C_1 的半徑）

$\therefore \angle AIS = \angle ANS \quad \cdots\cdots \quad (7)$ （等腰三角形的底角）

比較 (6) 式及 (7) 式得：

$\angle AIS = \angle BMT$

$\therefore AI // BM$ （同位角相等）

$\triangle AEI \sim \triangle BEM$ （等角）

$\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{IE}{ME} \quad \cdots\cdots \quad (8)$ （相似三角形的對應邊）

$\because \triangle ACE \sim \triangle BDE$ （已證）

$\therefore \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CE}{DE} \quad \cdots\cdots \quad (9)$ （相似三角形的對應邊）

比較 (8) 式及 (9) 式得： $\dfrac{IE}{ME} = \dfrac{CE}{DE} \quad \cdots\cdots \quad (10)$

$\angle CEI = \angle DEM$ （公共角）

$\therefore \triangle CEI \sim \triangle DEM$ （兩邊成比例，一夾角相等）

$\angle ECI = \angle EDM \quad \cdots\cdots \quad (11)$ （相似三角形的對應角）

$\angle ECI = \angle CNI \quad \cdots\cdots \quad (12)$ （交錯弓形的圓周角）

比較 (11) 式及 (12) 式得： $\angle EDM = \angle CNI$

$\therefore CDMN$ 為圓內接四邊形 （外角 = 內對角）

$EC \times ED = EN \times EM \quad \cdots\cdots \quad (13)$ （相交弦定理）

另一方面， $EC \times ED = EH \times EP \quad \cdots\cdots \quad (14)$

（於圓 CDP 應用相交弦定理）

比較 (13) 式及 (14) 式得： $EN \times EM = EH \times EP$

$\therefore HPMN$ 為圓內接四邊形 （相交弦定理的逆定理）

$\therefore N$ 在圓 HMP 上。

再者， $BM \perp FM$ （切綫 ⊥ 半徑）

$MJ \perp FM$ （直綫上的鄰角）

$\therefore JOM$ 為圓 HMP 的直徑 $\cdots\cdots$ $(*)$

$\because \angle ONM = \angle ANS$ 及 $\angle BMT = \angle OMN$ （對頂角）

由 (6) 式得： $\angle OMN = \angle ONM \quad \cdots\cdots \quad (15)$ （等量代換）

$OM = ON$ （等角對等邊）

$\therefore O$ 為圓 HMP 的圓心。

$\because A$、 N 及 O 共綫。

$\therefore AN + NO = AO$

$\therefore$ 圓 HMP 與圓 C_1 外切於 N 。

證明完畢。

討論一：　為確保步驟 2 中 DC 和 BA 有交點 E，圓 C_1 和圓 C_2 必須為大小不同；否則 DC 和 BA 平行而沒有交點；另外，圓 C_1 和圓 C_2 可以相交或不相交。

討論二：　若圓 C_1 大於圓 C_2；可重新命名 C_1 為 C_2，及 C_2 為 C_1。

討論三：　在步驟 6 中，由外點 F 可引兩條不同的切綫至圓 C_2 上。若由 F 引另一條切綫至圓 C_2 上的 M 點（在圓 CDP 外），其餘步驟不變，則可作一圓過 P 而內切圓 C_1 和圓 C_2（圖 156）。
證明從略。

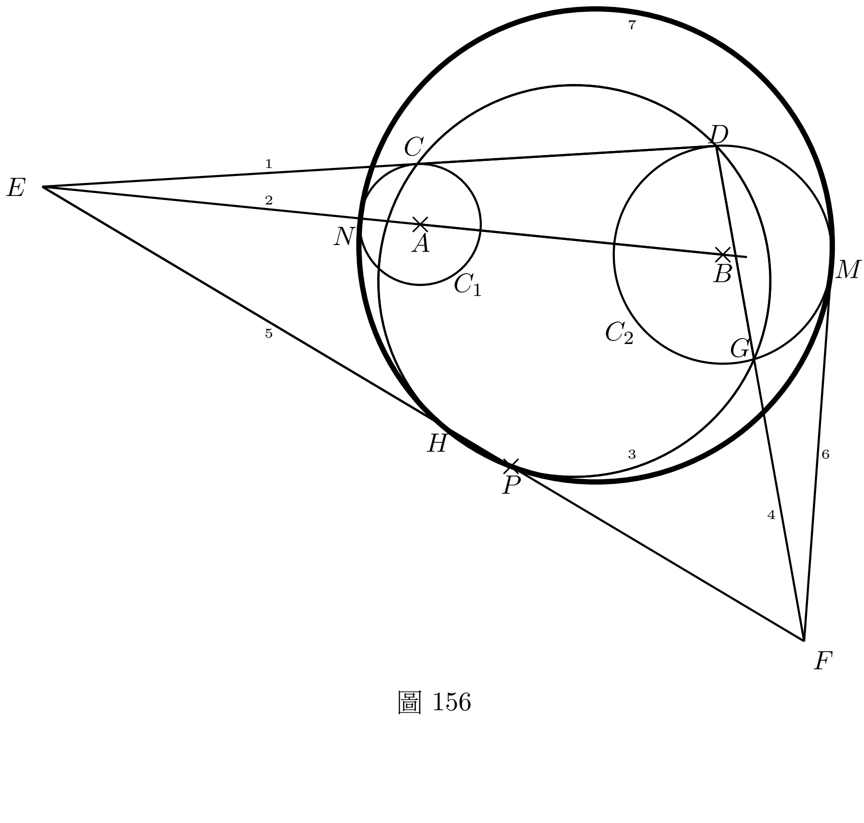


圖 156

討論四：　若圓 C_1 及圓 C_2 沒有相交，作一圓過 P，內切圓 C_1 及外切圓 C_2。

作圖方法如下（圖 157）：

1. 作二圓的內公切綫 CD 切圓 C_1 於 C 及切圓 C_2 於 D。（參考 5.5 作內公切綫）
2. 連接 AB，交 CD 於 E。
3. 作 $\triangle CDP$ 的外接圓，交圓 C_2 於 G。
4. 連接 DG。
5. 連接 PE，其延長綫交圓 CDP 於 H，交 GD 的延長綫於 F。
6. 由外點 F 引切綫 FM 至圓 C_2 上，切該圓於 M（在圓 CDP 內）。
7. 作 $\triangle HMP$ 的外接圓。
8. 連接 ME，其延長綫交圓 C_1 於 I、N，交圓 C_2 於 K，交圓 CDP 於 L、J。
9. 連接 AC。
10. 連接 BD。
11. 連接 AN。
12. 連接 BM，其延長綫交 NA 的延長綫於 O。分別設 S 和 T 為 A 及 B 至 NJ 之垂足。

除了第一步由外切綫改為內切綫之外，以上方法與原文（5.15 第 177 頁）的步驟幾乎一模一樣。讀者可參考上文，從而推出證明方法。

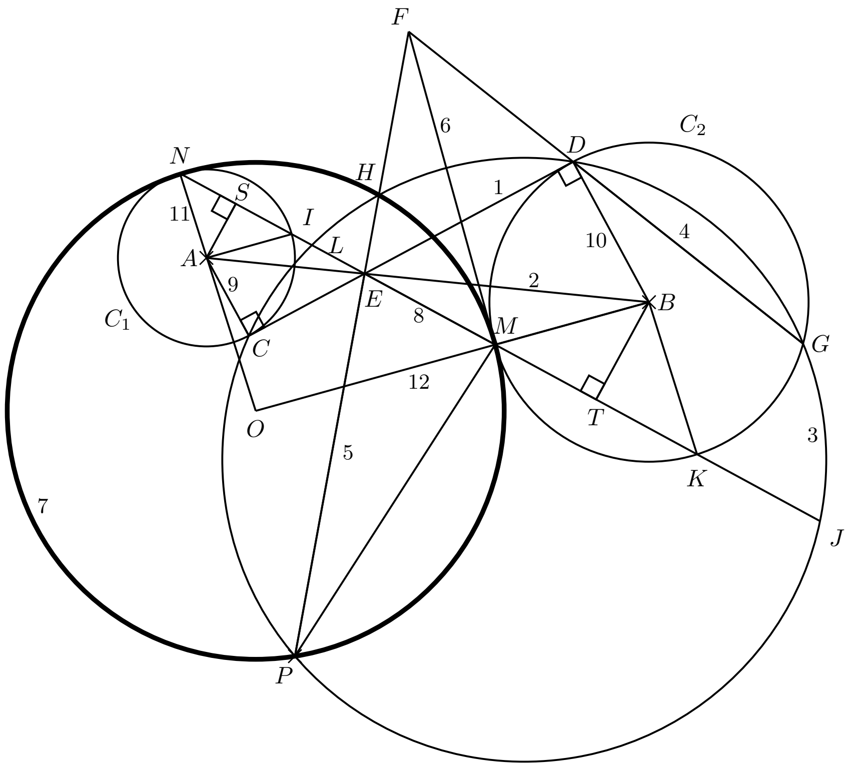


圖 157

討論五： 若圓 C_1 及圓 C_2 半徑相等，以下作圖法顯示如何作圓經過 P 而外切圓 C_1 和圓 C_2。

作圖方法如下（圖 158）：

1. 連接 AB。
2. 作 AB 的垂直平分綫 ST， M 為 AB 的中點。
3. 連接 PB，作 PB 的垂直平分綫，交 ST 於 D。
4. 以 D 為圓心， DB 為半徑作一圓，交圓 C_2 於 E 和 F。
5. 連接 EF。
6. 過 P 作 PG 垂直於 ST，交 EF 的延長綫於 G。
7. 由外點 G 引切綫至圓 C_2 上，切該圓於 H(在步驟 4 的圓內)。
8. 連接 PH，作 PH 的垂直平分綫，交 ST 於 O。
9. 以 O 為圓心， OP 為半徑，作一圓。

作圖完畢。

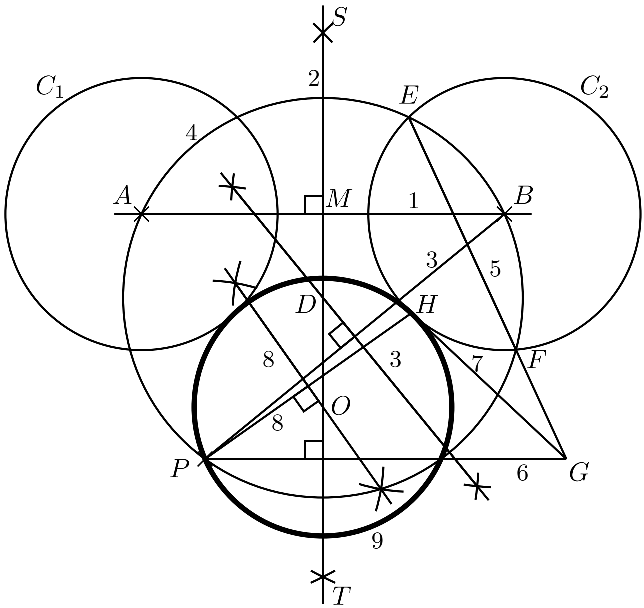


圖 158

證明從略。

討論六： 若圓 C_1 及圓 C_2 半徑相等，以下作圖法顯示如何作圓經過 P 而內切圓 C_1 和圓 C_2（圖 159）。

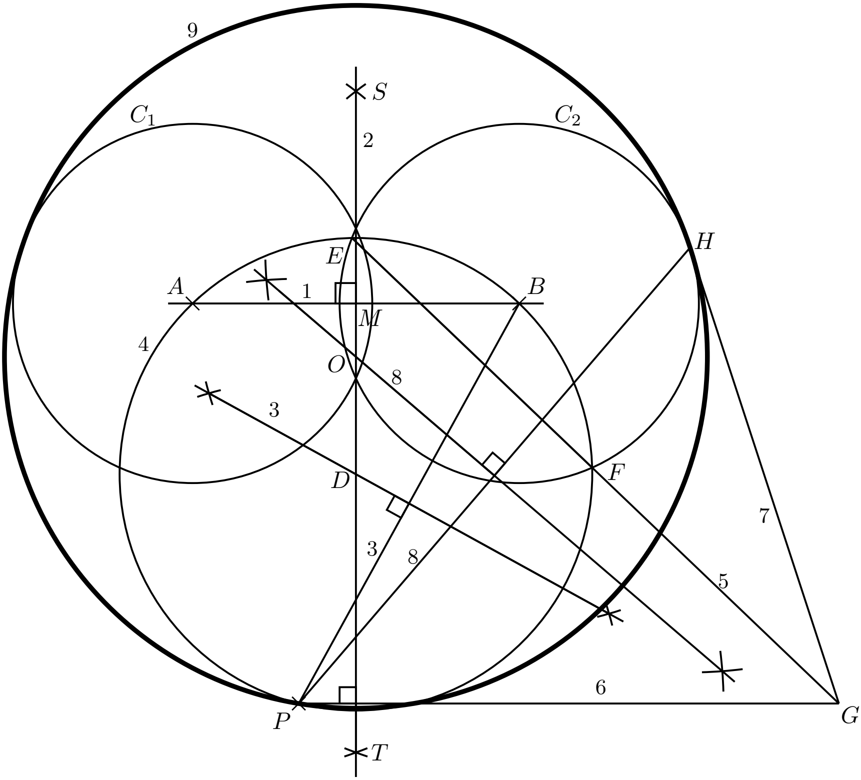


圖 159

只要將步驟 7 改為由外點 G 引另一條切綫至圓 C_2 上，切該圓於 H（在討論五中步驟 4 的圓外）；其餘步驟相同。

有關圓的作圖法，尚有多款。礙於篇幅所限，及時間不足，故未能一一涵蓋，要留待讀者自行研究了。

第 6 章　從黃金分割……到正五邊形

6.1　黃金分割點

如圖 160，已給一綫段 AB， P 在 AB 之間，使得 $AP : PB = AB : AP$。P 稱為 AB 的黃金分割點。

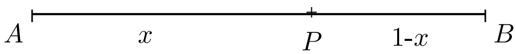


圖 160

1. 不妨假設 $AB = 1$ 單位，設 $AP = x$ 單位，則 $PB = (1-x)$ 單位。由定義所得， $x : (1-x) = 1 : x$。

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\because x > 0$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

2. 作圖方法如下（圖 161）：

(1) 作 AB 的垂直平分綫， C 為 AB 的中點。

(2) 作 BA 的延長綫。

(3) 以 A 為圓心， AC 為半徑，作一半圓，交 BA 的延長綫於 D。

(4) 過 A 作 AE 垂直於 AB。

(5) 以 A 為圓心， AB 為半徑，作一弧形，交 AE 於 F。

(6) 連接 DF。

(7) 以 D 為圓心， DF 為半徑，作一弧形，交 AB 於 P。

作圖完畢。

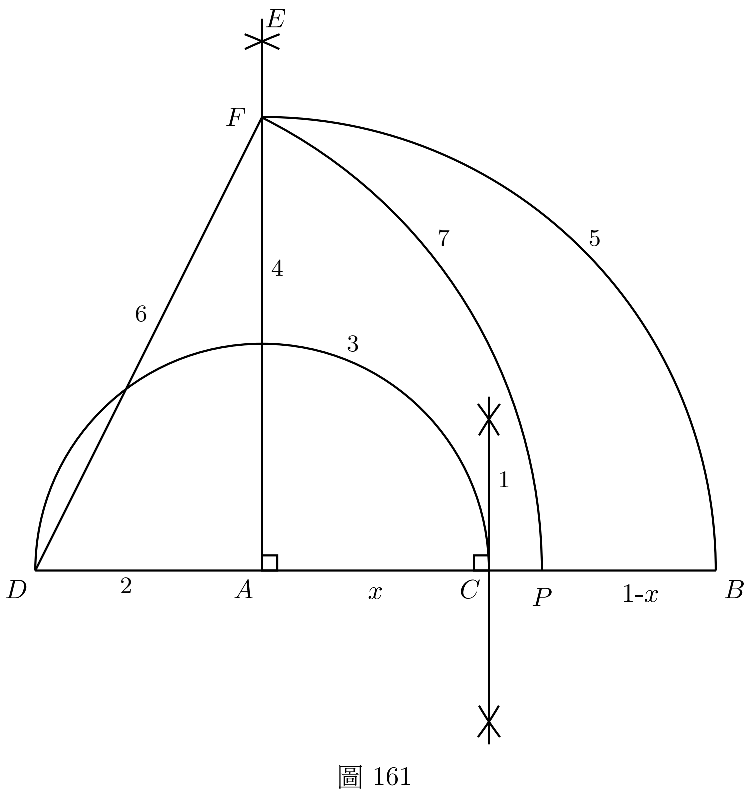


圖 161

證明如下：

$AD = AC = \dfrac{1}{2}$	（C 為 AB 的中點及 $AB = 1$）
$AF = AB = 1$	（由作圖所得）
$\angle DAF = 90^\circ$	（由作圖所得）
$DF^2 = AD^2 + AF^2$	（於 $\triangle ADF$ 應用畢氏定理）
$DF^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 = \dfrac{5}{4}$	
$DF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$	
$DP = DF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$	（由作圖所得）

$AP = DP - DA = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，約等於 0.618，稱為黃金比率。

6.2　黃金三角形

如圖 162，三角形 ABC 為等腰三角形，其中 $AB = AC = 1$ 單位。 P 為 AB 上的點，使得 $AP = PC = BC$。這三角形稱為黃金三角形。

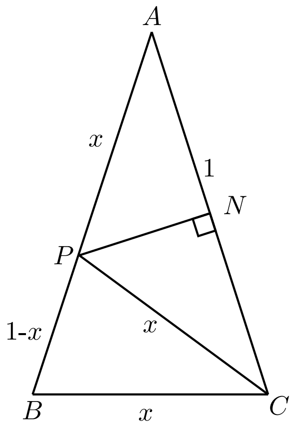


圖 162

1. 求黃金三角形內的所有角。

   設 $\angle BAC = \theta$， $AP = PC = BC = x$ 單位。

   $\angle ACP = \theta$　（等腰三角形的底角）

   $\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP = 2\theta$　（三角形外角）

   $\angle ABC = \angle BPC = 2\theta$　（等腰三角形的底角）

   $\angle ACB = \angle ABC = 2\theta$　（等腰三角形的底角）

   $\theta + 2\theta + 2\theta = 180°$　（三角形內角和）

   $\theta = 36°$

   $\therefore \angle ACP = 36° = \angle BCP$

   $\angle ABC = 72° = \angle ACB$

   $\angle APC = 180° - 2 \times 36° = 108°$　（三角形內角和）

2. 現證明 P 為 AB 的黃金分割點。
由上文得知， $\triangle ABC \sim \triangle CPB$ （等角）
$\dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BC}{PB}$ （相似三角形的對應邊）
$\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$
$x^2 + x - 1 = 0$
$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
$\therefore P$ 為 AB 的黃金分割點。

3. 假設 N 為 AC 的中點。
易證 $\triangle APN \cong \triangle CPN$ （S.S.S.）
$\angle ANP = \angle CNP = 90^\circ$ （全等三角形的對應角）
$CN = AN = \frac{1}{2}$ （全等三角形的對應邊）
在 $\triangle CPN$ 中，
$\cos 36^\circ = \dfrac{CN}{CP} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \ldots\ldots (*)$

從上述結果可求得 $\cos 36^\circ$ 的準確值。

4. 已給邊長 $AB = AC = 1$ 單位，以尺規作黃金三角形。

作圖方法如下（圖 163）：

(1) 利用第 6.1 段黃金分割點提及的方法找出 AB 的黃金分割點 P。

(2) 以 P 為圓心， PA 為半徑，作一弧形。

(3) 以 A 為圓心， AB 為半徑，作一弧形，與步驟 (2) 的弧交於 C。

(4) 連接 AC 和 BC。

$\triangle ABC$ 為黃金三角形。

作圖完畢。

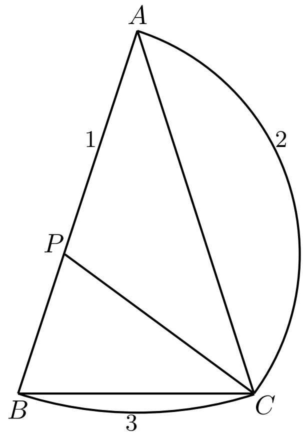


圖 163

5. 反過來說，若 $BC = 1$ 單位，求 AB。
   設 $AB = y$ 單位。
   $\because \triangle ABC \sim \triangle CPB$　　（等角）
   $\therefore \dfrac{y}{1} = \dfrac{1}{y-1}$　　（相似三角形的對應邊）
   $y^2 - y – 1 = 0$
   $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 約等於 1.618，也稱為黃金比率。

6. 已給邊長 $BC = 1$ 單位，以尺規作黃金三角形。

   作圖方法如下（圖 164）：

   (1) 作 BC 的垂直平分綫， M 為 BC 的中點， $MC = \dfrac{1}{2}$。
   (2) 作 BC 的延長綫。
   (3) 過 C 作 CN 垂直於 BC。
   (4) 以 C 為圓心， BC 為半徑，作一弧形，交 CN 於 Q。
   $CQ = BC = 1$
   (5) 連接 MQ。
   $MQ^2 = MC^2 + CQ^2$　（畢氏定理）
   $MQ^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} \therefore MQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(6) 以 M 為圓心， MQ 為半徑，作一弧形，交 BC 的延長綫於 D。

$MD = MQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$； $BD = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

(7) 以 B 為圓心， BD 為半徑，作一弧形。

(8) 以 C 為圓心， BD 為半徑，作一弧形，兩弧相交於 A。

(9) 連接 AB。

(10) 連接 AC。 $AB = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = AC$。

$\triangle ABC$ 為黃金三角形。

作圖成功。

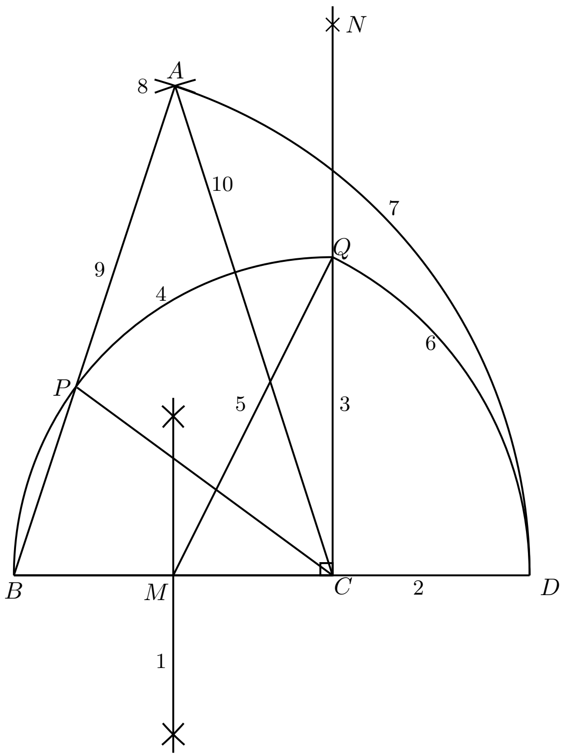


圖 164

6.3　黃金矩形

如圖 165，已給一矩形 $PQRS$，其中 $PS = m$， $SR = n$ 及 $m < n$。若從該矩形中除去一正方形 $PTWS$，剩下的矩形 $QRWT$；旋轉 $90°$（圖 166 及圖 167）。假設 $PQRS$ 與 $WTQR$ 相似，這兩矩形稱為黃金矩形。

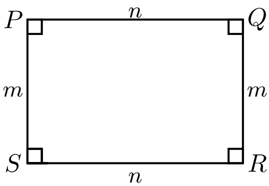


圖 165

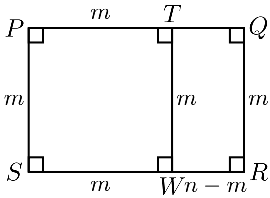


圖 166

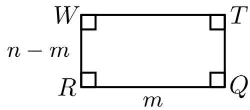


圖 167

1. 試求 $m : n$。

   $m : n = (n{-}m) : m$　　　　　（相似圖形的對應邊）

   $m^2 = n^2{-}mn$

   $m^2 + mn -\ n^2 = 0$

   $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 + \dfrac{m}{n} -\ 1 = 0$

   設 $\dfrac{m}{n} = x$，則原式可寫成 $x^2 + x{-}1 = 0$

   $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

   $\therefore m : n = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : 1 \approx 0.618 : 1$

2. 以尺規作黃金矩形，作圖方法如下（圖 168）：

   (1) 作綫段 SR（任意長度）。

   (2) 利用第 6.1 段的方法找出 SR 的黃金分割點 W。

   (3) 過 S 作一綫段垂直於 SR。

   (4) 以 S 為圓心， SW 為半徑，作一弧形，交步驟 3 的垂直綫於 P。

(5) 過 R 作一綫段垂直於 SR。

(6) 過 P 作一綫段垂直於 PS，與步驟 5 的垂直綫相交於 Q。

$PQRS$ 便是黃金矩形了，作圖成功。

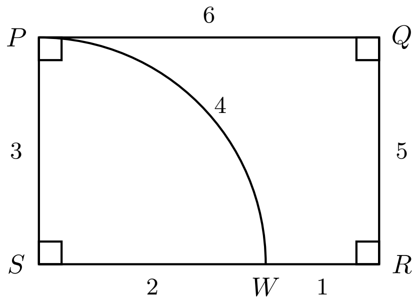


圖 168

6.4 正五邊形

1. 已給正五邊形 $PQRST$，邊長 $2a$。找出對角綫長度（圖 169）。

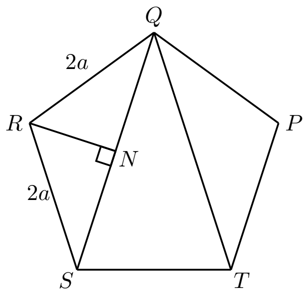


圖 169

$\angle QRS = \dfrac{180^\circ \times (5-\ 2)}{5} = 108^\circ$ （正多邊形內角和）

設 N 為 QS 的中點。

易證 $\triangle QRN \cong \triangle SRN$ （S.S.S.）

$\therefore \angle QNR = \angle SNR = 90^\circ$ （全等三角形的對應角）

$\angle RQN = \angle RSN = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ （三角形內角和）

$QN = NS = 2a\cos 36^\circ$ （全等三角形的對應邊）

$QS = 2QN = 4a\cos 36^\circ$

在第 191頁第 6.2 段黃金三角形第 3 點已證明

$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} \ldots\ldots (*)$

$\therefore QS = 4a\cos 36^\circ = \left(1+\sqrt{5}\right)a$

$\triangle QRS$ 三邊分別為 $2a$， $2a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$，三角分別為

36°， 108° 及 $36^\circ \ldots\ldots (1)$

$\triangle QRS \cong \triangle QPT$ （S.A.S.）

$\angle SQT = 108^\circ – 36^\circ – 36^\circ = 36^\circ$

$\angle QST = \angle QTS = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ （等腰三角形底角）

$\triangle QST$ 三邊分別為 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$， $2a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$，三角分別為

36°， 72° 及 $72^\circ \ldots\ldots (2)$

2. 試作正五邊形 $ABCDE$，邊長 $2a$。

作圖方法如下（圖 170）：

(1) 作 $DE = 2a$，及其垂直平分綫， F 為 DE 的中點。

(2) 過 E 作 EK 垂直於 DE。

(3) 以 E 為圓心， ED 為半徑，作一弧，交 EK 於 H。

(4) 以 D 為圓心， DE 為半徑，作一弧。

(5) 以 F 為圓心， FH 為半徑，作一弧，交 DE 的延長綫於 G。

(6) 以 D 為圓心， DG 為半徑，作一弧，交步驟 3 的弧於 A。

(7) 以 E 為圓心， DG 為半徑，作一弧，交步驟 6 的弧於 B，及交步驟 4 的弧於 C。

(8) 連接 $ABCDE$，則 $ABCDE$ 便是正五邊形了。

作圖完畢。

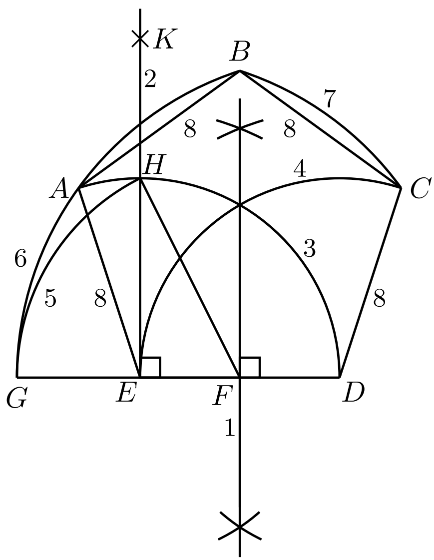


圖 170

證明如下：

$FD = FE = a$　（F 為 DE 的中點）

$\angle FEH = 90^\circ$　（由作圖所得）

$EH = ED = 2a$　（由作圖所得）

$FH^2 = FE^2 + EH^2$　（於 $\triangle EFH$ 應用畢氏定理）

$FH^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$

$FH = \sqrt{5}a$

$FG = FH = \sqrt{5}a$　（由作圖所得）

$DG = DF + FG = \left(1+\sqrt{5}\right)a$

$DA = DG = \left(1+\sqrt{5}\right)a$　（由作圖所得）

$EC = EB = DA = BD = \left(1+\sqrt{5}\right)a$　（由作圖所得）

$\triangle BDE$ 的邊長分別為 $2a$，$\left(1+\sqrt{5}\right)a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$。

$\triangle BDE \cong \triangle QST$　（S.S.S.，由第 196 頁中 (2) 式得知）

$\angle BDE = 72^\circ = \angle BED$　（全等三角形的對應角）

$\angle DBE = 36^\circ$　（全等三角形的對應角）

$\because \triangle CDE \cong \triangle PTS$　（S.S.S.）

$\therefore \angle CDB = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ = \angle AEB$

$AE = 2a = CD$　（由作圖所得）

$\triangle BCD \cong \triangle QPT \cong \triangle BAE$　（S.A.S.，由第 196 頁中 (1) 式得知）

$AB = 2a = BC$　（全等三角形的對應邊）

$\angle BCD = 108^\circ = \angle BAE$　（全等三角形的對應角)

$\angle CBD = 36^\circ = \angle ABE$　（全等三角形的對應角)

$\angle ABC = 36^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ$

$\therefore ABCDE$ 為正五邊形。

證明完畢。

6.5　圓內接正五邊形

1. 已給一正五邊形 $PQRST$，內接於一圓，圓心 O，半徑為 r。以 r 表示 PQ 的長度（圖 171）。

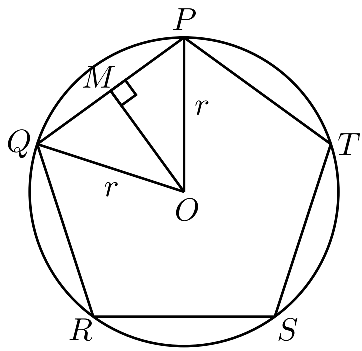


圖 171

在第 191頁第 6.2 段黃金三角形第 3 點中已證明：
$\cos\ 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$。

設 M 為 PQ 的中點， $PM = MQ$。

$OM = OM$	（公共邊）
$OP = OQ = r$	（半徑）
$\therefore \triangle POM \cong \triangle QOM$	（S.S.S.）
$\angle PMO = \angle QMO = 90°$	（全等三角形的對應角）
$\angle POQ = 360° \div 5 = 72°$	（同頂角）
$\angle POM = \angle QOM = 72° \div 2 = 36°$	（全等三角形的對應角）
$PM = QM = r\sin 36°$	

$$PQ = 2PM = 2r\sin 36° = 2r\sqrt{1-\ \cos^2 36°} = 2r\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$PQ = r\sqrt{4-\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)} = r\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = r\sqrt{\frac{4+1-2\sqrt{5}+5}{4}}$$
$$= r\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

2. 已給一圓，圓心 O，半徑為 r。試作正五邊形 $ABCDE$ 內接於圓上。

作圖方法如下（圖 172）：

(1) 過 O 作圓直徑 IOH。

(2) 作 OH 的垂直平分綫， G 為 OH 的中點。

(3) 過 O 作半徑 OA 垂直於 IH。

(4) 以 G 為圓心， GA 為半徑，作一弧，交 IH 於 J。

(5) 以 A 為圓心， AJ 為半徑，作一弧，交圓於 B 和 E。

(6) 以 B 為圓心， BA 為半徑，作一弧，交圓於 C。

(7) 以 E 為圓心， EA 為半徑，作一弧，交圓於 D。

(8) 連接 $ABCDE$，則 $ABCDE$ 便是正五邊形了。

作圖完畢。

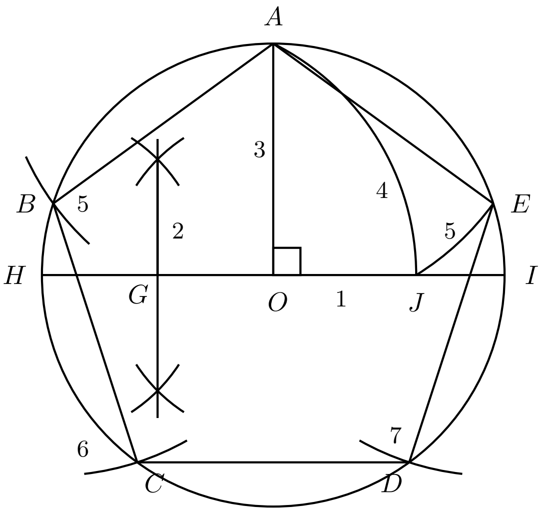


圖 172

證明如下：

$AO^2 + OG^2 = GA^2$ （於 $\triangle AOG$ 應用畢氏定理）

$r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = GA^2$ （G 為 OH 的中點）

$\therefore GA = \frac{\sqrt{5}}{2}r$

$GJ = GA = \frac{\sqrt{5}}{2}r$ （由作圖所得）

$OJ = GJ - OG = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

$AJ^2 = OA^2 + OJ^2$ （在 $\triangle AOJ$ 應用畢氏定理）

$$AJ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2} = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

$AB = BC = AE = ED = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$ （由作圖所得）

$OA = OB = OC = OD = OE$ （半徑）

$\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle AOE \cong \triangle DOE$ （S.S.S）

$\angle AOB = 72^\circ = \angle BOC = \angle AOE = \angle DOE$ （全等三角形的對應角及第一部分的結果）

$\therefore \angle DOC = 360^\circ - 72^\circ - 72^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ （同頂角）

$\therefore \triangle DOC \cong \triangle AOB$ （S.A.S）

$CD = AB = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$ （全等三角形的對應邊）

$\therefore ABCDE$ 為一圓內接正五邊形。

證明完畢。

參考資料

1. 「中學課程綱要 —數學科中一至中五 (1999)」第 22-23 頁
2. 台灣大學數學系康明昌「古希臘幾何三大問題」
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles
3. 香港中學會考 1958 Mathematics Paper 2 Q1(a)
4. 香港數學競賽 2009/2010 初賽（幾何作圖）第 1 題
5. HKU Matriculation Examination (1957) Ordinary Level Pure Mathematics Paper II Q2(b)
6. HKU Matriculation Examination (June 1954) Ordinary Level Pure Mathematics Paper II Q2(c)
7. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 2 題
8. 香港數學競賽 1998/1999 初賽團體項目第 9 題
9. 香港數學競賽 2006/2007 初賽團體項目第 9 題
10. 香港數學競賽 1998/1999 初賽團體項目第 10 題
11. HKU Matriculation Examination (June 1955) Ordinary Level Pure Mathematics Paper II Q1(b)
12. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 2 題

13. 香港數學競賽 2009/2010 初賽（幾何作圖）第 3 題

14. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 3 題

15. 1973 香港中文中學會考高級數學試卷二 Q7

16. 數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」
http://etv.edb.gov.hk/resource/749.doc

17. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）第 1 題

18. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 1 題

19. 香港數學競賽 2008/2009 初賽（幾何作圖）樣本題第 3 題

20. 教育局 (2012)。《數學科常用英漢辭彙》。 http://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kla/ma/res/glossary-notes.html

數學百子櫃系列		作者
（一）	漫談數學學與教—新高中數學課程必修部份	張家麟、黃毅英、韓藝詩
（二）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部份單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
（三）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部份單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
（四）	談天說地話數學	梁子傑
（五）	數學的應用：圖像處理—矩陣世紀	陳漢夫
（六）	數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
（七）	數學的應用：基因及蛋白的分析	徐國榮
（八）	概率萬花筒	蕭文強、林建
（九）	數學中年漢的自述	劉松基
（十）	中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集	
（十一）	從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀	張家麟、黃毅英
（十二）	2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集	
（十三）	2011/12 中學生統計創意寫作比賽作品集	
（十四）	數學教師不怕被學生難倒了！—中小學數學教師所需的數學知識	黃毅英、張僑平
（十五）	2012/13 中學生統計創意寫作比賽作品集	